Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.9, стр.626 - 630

О ТРОЙНЫХ КОРРЕЛЯЦИЯХ В ИЗОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

О.Чхетиани[1]

Институт космических исследований РАН

117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 февраля 1999 г.

После переработки 10 марта 1999 г.

Исследуется эволюция корреляционных характеристик в 3-мерной изотропной электронной магнитогидродинамической турбулентности. В области инерционного интервала получены универсальные точные соотношения, связывающие продольные и продольно-поперечные двухточечные тройные корреляции компонент флуктуационных магнитных полей со скоростями диссипации магнитных спиральности и энергии.

PACS: 47.27.-i, 47.65.+a, 52.35.Ra, 95.30.Qd

Все статистические теории турбулентности учитывают известный точный результат Колмогорова – "закон 4/5" [1], связывающий пространственные продольные корреляции скорости 3-го порядка со скоростью диссипации энергии. В магнитной гидродинамике подобное соотношение было получено Чандрасекхаром [2]. Недавно аналогичная связь (закон 2/15) была установлена для гидродинамической турбулентности со спиральностью [3, 4]. Подтверждения закона 4/5 для разнообразных турбулентных гидродинамических течений хорошо известны [5]. Получены подтверждения закона 2/15 [3, 4] для спиральности [6]. Важно отметить, что подобные точные соотношения получаются путем решения динамических уравнений и являются следствием законов сохранения. При их получении не используются никакие размерностные соображения. Фундаментальное значение закона 4/5 в гидродинамике подробно рассмотрено в [7].

Электронная магнитная гидродинамика (ЭМГД) – это ветвь плазменных колебаний с преобладанием холловского члена [8, 9], представляющая собой предельный случай многокомпонентной МГД, когда можно пренебречь движением ионов, а движение электронов сохраняет квазинейтральность. Описание (при однородной концентрации), в отличие от обычного МГД случая, может быть сведено к одному нелинейному уравнению для магнитного поля. Область применимости ЭМГД – это лабораторные и промышленные плазменные установки, ионосфера, солнечная фотосфера, твердое тело [9, 10]. В 70-е годы также использовался термин МГД на геликонных частотах [10]. Слабая турбулентность геликонов (вистлеров) рассмотрена в [11 – 13]. Динамические свойства сильной 3-мерной турбулентности в ЭМГД рассматривались в [14]. В [8] приводятся соображения в пользу реализации в ЭМГД механизма лишь слабой турбулентности.

ЭМГД описывается уравнением [8, 14]

$$\partial_t \mathbf{h} + \mathrm{rot}\left[\frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{h}\right] + c\,\mathrm{rot}\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0, \tag{1}$$

[1] e-mail: ochkheti@mx.iki.rssi.ru

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{h}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{h} = 0. \tag{2}$$

При $n = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$ получаем

$$\partial_t \mathbf{h} = -\frac{c}{4\pi n e}\mathrm{rot}\,[\mathrm{rot}\mathbf{h} \times \mathbf{h}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{h}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{h} = 0. \tag{3}$$

В частотной области это соответствует области

$$w_i < w < w_e.$$

В дальнейшем введем обозначения $f = c/4\pi ne$, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$. По структуре своей (3) близко уравнению Навье – Стокса для несжимаемой жидкости. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оно сохраняет энергию $\int\limits_V \frac{\mathbf{h}^2}{2}dV$ и спиральность магнитного поля $\int\limits_V \mathbf{ah}dV$.

Рассмотрим свободную эволюцию однородных и изотропных флуктуаций магнитного поля в ЭМГД. Выписав уравнение для вектор-потенциала $\mathbf{a} = \mathrm{rot}^{-1}\mathbf{h}$, получаем после усреднения уравнения типа Кармана – Ховарта для двухточечных корреляционных функций, связанных с энергией и спиральностью магнитного поля:

$$\partial_t h_{ii} = f\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_m}\left(h_{j,km} - h_{jm,k}\right) + 2\nu_m\Delta_r h_{ii} =$$

$$= f\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_m}\left(h_{km,j} - h_{jm,k}\right) + 2\nu_m\Delta_r h_{ii}, \tag{4}$$

$$\partial_t g_{ii} = 2f\frac{\partial}{\partial r_m}h_{im,i} + 2\nu_m\Delta_r g_{ii}, \tag{5}$$

где

$$h_{ii} = \langle h_i(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle, \qquad g_{ii} = \langle a_i(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle, \tag{6}$$

$$h_{jm,k} = \langle h_j(\mathbf{x})h_m(\mathbf{x})h_k(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle. \tag{7}$$

В правой части уравнений (4), (5) находятся пространственные производные по r от двухточечного корреляционного тензора третьего ранга. Общий вид такого тензора с учетом гиротропии и несжимаемости магнитного поля следующий [2 – 4]:

$$h_{ij,k}(\mathbf{r}) = V\left(\varepsilon_{jkl}r_i r_l + \varepsilon_{ikl}r_j r_l\right) + \frac{2}{r}\partial_r T r_i r_j r_k - \left(r\partial_r T + 3T\right)\left(r_i\delta_{jk} + r_j\delta_{ik}\right) + 2T\delta_{ij}r_k. \tag{8}$$

В [2] рассматривались флуктуации магнитного поля без спиральности. В этом случае тензор $h_{ij,k}$ состоит лишь из первых двух членов, пропорциональных скалярному V, связанному с переносом энергии. Учет спиральности добавляет члены, пропорциональные произведению псевдоскалярных величин и нечетных комбинаций компонент радиус-вектора. Формально соленоидальный тензор (8) совпадает с аналогичным тензором для тройных корреляций поля скорости в гидродинамической турбулентности [3]. Однако в отличие от последнего, он не меняется при отражении координат, то есть $h_{ij,k}(-\mathbf{r}) = h_{ij,k}(\mathbf{r})$. Из свойств однородной турбулентности следует также $h_{k,ij}(r) = h_{ij,k}(-r)$ [5]. Оба этих свойства учтены в (4).

Для дальнейшего нам необходимо рассмотреть вспомогательный тензор $\langle \delta h_i(\mathbf{x}|\mathbf{r})\delta h_j(\mathbf{x}|\mathbf{r})\rangle$, где $\delta\mathbf{h}(\mathbf{x}|\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{x})$. В однородной турбулентности он имеет вид

$$\langle \delta h_i(\mathbf{x}|\mathbf{r})\delta h_j(\mathbf{x}|\mathbf{r})\rangle = B_{tt}(r)\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) + B_{rr} n_i n_j,$$

где $n = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Из условия несжимаемости $B_{tt} = \dfrac{1}{2r}\partial_r\left(r^2 B_{rr}\right)$[15]. Тогда

$$\langle h_i(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = \langle \mathbf{h}^2(\mathbf{x})\rangle - \frac{1}{2r^2}\partial_r\left(r^3 B_{rr}\right). \qquad (9)$$

Величину g_{ii} представляем в виде

$$g_{ii} = \langle a_i(\mathbf{x})h_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = \langle a_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})h_i(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle - \frac{2}{r^2}\partial_r\left(r^3 C(r)\right). \qquad (10)$$

Подставив (8),(9) и (10) в (4), (5), получаем

$$-2\bar{\varepsilon}_m - \frac{1}{2}\partial_t\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^3 B_{rr}\right) = -\frac{4f}{r^2}\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r^5 V\right)\right) - \frac{\nu_m}{r^2}\partial_r\left(\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^3 B_{rr}\right)\right), \qquad (11)$$

$$-2\bar{\eta}_m - \partial_t\frac{2}{r^2}\partial_r\left(r^3 C\right) = -\frac{4f}{r^2}\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r^5 T\right)\right) - \frac{2\nu_m}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\left(\frac{2}{r^2}\partial_r\left(r^3 C\right)\right)\right). \qquad (12)$$

Здесь

$$\bar{\varepsilon}_m = \nu_m\left\langle\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right\rangle = \nu_m\langle(\mathrm{rot}\mathbf{h})^2\rangle, \qquad (13)$$

$$\bar{\eta}_m = \nu_m\left\langle\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right\rangle = \nu_m\langle\mathbf{h}\mathrm{rot}\mathbf{h}\rangle \qquad (14)$$

– соответственно диссипации магнитной энергии и спиральности. Последовательное интегрирование с учетом регулярности поведения при $r \to 0$ дает

$$-\frac{4}{3}\bar{\varepsilon}_m - \partial_t B_{rr} = -\frac{8f}{r^4}\partial_r\left(r^5 V\right) - \frac{2\nu_m}{r^4}\partial_r\left(r^4\partial_r B_{rr}\right), \qquad (15)$$

$$-\frac{\bar{\eta}_m}{3} - \partial_t C = -\frac{2f}{r^4}\partial_r\left(r^5 T\right) - \frac{2\nu_m}{r^4}\partial_r\left(r^4\partial_r C\right). \qquad (16)$$

В инерционном интервале можно пренебречь временными производными и диссипацией и получить, что функции T, V зависят лишь от скоростей диссипации магнитных энергии и спиральности и равны соответственно

$$V = \bar{\varepsilon}_m/f/30, \qquad T = \bar{\eta}_m/f/30. \qquad (17)$$

Таким образом, двухточечный корреляционный тензор 3-го ранга для флуктуаций магнитного поля приобретает вид

$$\langle h_i(\mathbf{x})\,h_j(\mathbf{x})\,h_k(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle = \frac{\bar{\varepsilon}_m/f}{30}\left(\varepsilon_{jkl}r_i + \varepsilon_{ikl}r_j\right)r_l - \frac{\bar{\eta}_m/f}{10}\left(r_i\delta_{jk} + r_j\delta_{ik} - \frac{2}{3}\delta_{ij}r_k\right). \qquad (18)$$

Особо отметим, что с точностью до числовых коэффициентов тензор (18) коэффициентов совпадает с соответствующим корреляционным тензором флуктуаций скорости в гидродинамической турбулентности [4].

Разобьем магнитное поле на продольную и поперечную составляющие:

$$\mathbf{h}_l = (\mathbf{h}\mathbf{r})\,\mathbf{r}/r^2, \qquad \mathbf{h}_t = \mathbf{h} - \mathbf{h}_l,$$
$$\delta h_l\,(\mathbf{x}|\mathbf{r}) = (\mathbf{h}_l(x+r) - \mathbf{h}_l(\mathbf{x}))\,\mathbf{r}/r.$$

В этих обозначениях получаем, что

$$\langle \delta h_l(\mathbf{x}|\mathbf{r})^3 \rangle = -24Tr = -\frac{4}{5}\bar{\eta}_m/f\cdot r, \tag{19}$$

$$\langle \delta \mathbf{h}_l(\mathbf{x}|\mathbf{r})[\mathbf{h}_t(x+r)\times\mathbf{h}_t(x)] \rangle = 4Vr^2 = \frac{2}{15}\bar{\varepsilon}_m/f\cdot r^2. \tag{20}$$

Таким образом, в однородной и изотропной ЭМГД турбулентности должны выполняться законы 4/5 и 2/15. Как видно из (19), определение спиральности в ЭМГД турбулентности существенно проще, чем в гидродинамике, где для этого необходимы особо точные измерения различных компонент скорости или использование тонких устройств, определяющих градиенты. В ЭМГД для этого достаточно измерения лишь продольных компонент флуктуационных магнитных полей или токов.

Подчеркнем, что при получении соотношений для величин T и V, связанных с потоками спиральности и энергии, не использовались никакие размерностные соображения. То есть результат этот, являющийся лишь следствием статистических свойств изотропных решений уравнений ЭМГД, универсален и не зависит от того, какая турбулентность развивается в системе – слабая или сильная.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что учет анизотропии в виде внешнего постоянного магнитного поля $\mathbf{h}_0 = \mathrm{const}$ приведет лишь к модификации полученных результатов. Появится зависимость от угла между радиусом-вектором и направлением магнитного поля, поскольку члены, связанные с внешним полем ($\sim (\mathbf{h}_0\nabla)\mathrm{rot}\mathbf{h}$), при сохранении свойств однородности не войдут в уравнения вида (4), (5) для двухточечных корреляционных функций.

"Лишний" по сравнению с уравнением Навье – Стокса ротор в ЭМГД приводит к своеобразной перестановке – для продольных корреляций, как и в гидродинамике, действует закон 4/5, но связан он с гиротропной составляющей флуктуаций, то есть с потоком спиральности и, напротив, смешанные продольно-поперечные корреляции связаны с потоком магнитной энергии. Приведем сравнительную сводку основных результатов в таблице.

	Гидродинамика $\mathbf{v}$	ЭМГД $\mathbf{h}$
Нелинейность	$[\mathrm{rot}v\times v] + \nabla\left(p + v^2/2\right)$	$f\,\mathrm{rot}\,[\mathrm{rot}\mathbf{h}\times\mathbf{h}]$
Диссипация энергии	$\bar{\varepsilon} = \nu\langle(\mathrm{rot}\mathbf{v})^2\rangle$	$\bar{\varepsilon}_m = \nu_m\langle(\mathrm{rot}\mathbf{h})^2\rangle$
Диссипация спиральности	$\bar{\eta} = \nu\langle\mathrm{rot}\mathbf{v}\mathrm{rot}^2\mathbf{v}\rangle$	$\bar{\eta}_m = \nu_m\langle\mathbf{h}\mathrm{rot}\mathbf{h}\rangle$
Закон 4/5	$\langle\delta v_l(\mathbf{x}\vert\mathbf{r})^3\rangle = -\frac{4}{5}\bar{\varepsilon}r$	$\langle\delta h_l(\mathbf{x}\vert\mathbf{r})^3\rangle = -\frac{4}{5}\bar{\eta}_m/fr$
Закон 2/15	$\langle\delta\mathbf{v}_l(\mathbf{x}\vert\mathbf{r})[\mathbf{v}_t(\mathbf{x}+\mathbf{r})\times\mathbf{v}_t(\mathbf{x})]\rangle = \frac{2}{15}\bar{\eta}r^2$	$\langle\delta\mathbf{h}_l(\mathbf{x}\vert\mathbf{r})[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}+\mathbf{r})\times\mathbf{h}_t(\mathbf{x})]\rangle = \frac{2}{15}\bar{\varepsilon}_m/fr^2$

В заключение выражаю благодарность С.С.Моисееву за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант #98-02-17229) и INTAS (совместный проект Грузия-INTAS #504).

1. А.Н.Колмогоров, ДАН СССР **32**, 19 (1941).
2. S.Chandrasechar, Proc. Roy. Soc. London, **A204**, 435 (1951).
3. О.Г.Чхетиани, Письма в ЖЭТФ, **63**, 768 (1996).
4. V.S.L'vov, E.Podivilov, and I.Procaccia, http://xxx.lanl.gov, chao-dyn/9705016 (1997).
5. А.С.Монин, А.М.Яглом, *Статистическая гидромеханика*, ч.II, Санкт-Петербург, Гидрометеоиздат, 1996.
6. L.Biferale, D.Pierotti, and F.Toschi, http://xxx.lanl.gov, chao-dyn/9804004 (1998).
7. U.Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.
8. А.С.Кингсеп, К.В.Чукбар, В.В.Яньков, Вопросы теории плазмы **16**, 209 (1987).
9. A.V.Gordeev, A.S.Kingsep, and L.I.Rudakov, Phys. Rep. **243**, 216 (1994).
10. С.И.Вайнштейн, УФН **120**, 613 (1976).
11. В.М.Яковенко, ЖЭТФ **57**, 554 (1968).
12. В.Н.Цытович, *Теория турбулентной плазмы*, М.: Энергоатомиздат, 1971.
13. М.А.Лившиц, В.Н.Цытович, ЖЭТФ **62**, 606 (1972).
14. С.И.Вайнштейн, ЖЭТФ **64**, 139 (1973).
15. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.