

О динамических свойствах “упругих” взаимодействий волновых солитонов с малым числом осцилляций поля

С. А. Скобелев¹⁾, А. В. Ким

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 17 августа 2004 г.

После переработки 28 октября 2004 г.

Путем численного моделирования динамики оптического циркулярно-поляризованного поля в среде керровского типа показано, что парным соударениям волновых солитонов с малым числом осцилляций поля относительно их энергетических характеристик присущи свойства соударений шредингеровских солитонов, а соответствующие им спектральные характеристики изменяются в соответствии с сохранением солитоноподобной структуры огибающей. В зависимости от абсолютной разности фаз полей имеют место три различных режима взаимодействия: прохождение одной структуры сквозь другую, их отталкивание, а также с точной репликацией одной исходной волновой структуры другой.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.Re, 42.65.Tg

Переход от солитонов огибающих, описываемых нелинейным уравнением Шредингера и его модификациями [1, 2], к волновым солитонам, содержащим малое число осцилляций поля, представляется нам достаточно интересным и важным шагом в теории нелинейных волновых явлений [3, 4]. Найденный новый класс уединенных решений волнового уравнения с нелинейностью керровского типа, описывающий распространение в нерезонансных средах электромагнитных импульсов циркулярно-поляризованного поля с солитонной структурой огибающей, включает в себя конечное число периодов колебаний, вплоть до одной [5]. Данный анализ представляется важным также и с практической точки зрения, ввиду значительных успехов в лазерной технике по генерации световых импульсов сверхкороткой длительности, включая и предельно короткие импульсы в несколько периодов оптических колебаний; такие импульсы обладают рядом широких потенциальных возможностей для их научных и технических приложений, в качестве которых отметим возможную сверхплотную упаковку информации с использованием таких сверхкоротких импульсов и, соответственно, сверхбыструю коммуникацию [6–8]. С точки зрения общей теории нелинейных волн, несомненно, принципиально важным здесь является вопрос о полной интегрируемости исходного нелинейного волнового уравнения, представляющийся пока мало разрешимым. В этой связи естественно, как нам кажется, обратиться к хорошо зарекомендовавшему себя приему, а именно, исследованию с помощью чис-

ленного моделирования парных соударений волновых солитонов, представляющих собой точные решения нелинейного волнового уравнения соответствующей гамильтоновой системы. В настоящей работе путем прямого численного моделирования нелинейной динамики оптического поля в среде с керровской нелинейностью показано, что в классе циркулярно-поляризованных полей волновые солитоны с малым числом колебаний в парных соударениях сохраняют свойства соударений шредингеровских солитонов относительно структуры своих огибающих, в то время как их частотные заполнения могут изменяться, однако, в соответствии с сохранением солитоноподобной структуры. В результате соударения не происходит излучения свободных полей, то есть несолитонной части спектра, сохраняя таким образом общую энергию, заключенную в солитонах.

Для детального анализа нелинейной волновой задачи, описывающей динамику поля как целого, без масштабного разделения на медленную огибающую и высокочастотное заполнение, удобно воспользоваться также редуцированной формой волнового уравнения в так называемом безотражательном приближении, полагающем изменения распределений полей малыми на масштабах, соизмеримых с характерными длинами волн. В этом случае векторное волновое уравнение с электронным типом нелинейности, допускающее уединенные решения в виде волновых солитонов, может быть представлено в виде [5]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z \partial \tau} + \mathbf{E} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\mathbf{E}^2 \mathbf{E}) = 0. \quad (1)$$

¹⁾e-mail: sksa@ufp.appl.sci-nnov.ru

Как нетрудно видеть, уравнение (1) допускает масштабную инвариантность, позволяющую записать ее в безразмерном виде. Здесь z – координата вдоль направления распространения, $\tau = t - z\varepsilon_0^{1/2}/c$ – время в сопровождающей системе координат, ε_0 – статическая диэлектрическая проницаемость среды, c – скорость света в вакууме. Данное уравнение описывает, в частности, распространение предельно коротких импульсов в оптическом кварцевом волокне в области аномальной дисперсии [3], если спектр импульса достаточно удален от точки нулевой дисперсии, а также в ионизованном газе, в котором плазменная дисперсия преобладает над газовой, связанной с нейтральными частицами [9].

Уравнение (1) относится к классу гамильтоновых систем с гамильтонианом вида

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\tau} \mathbf{E} d\tau' \right)^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})^2 \right] d\tau. \quad (2)$$

Следует отметить, что уравнение (1) допускает наличие также и других интегралов движения, в частности, равенства нулю среднего поля [5], однако именно (2) оказывается полезным с точки зрения моделирования, ввиду, как известно, высокой чувствительности функции гамильтона к точности численного расчета, что будет использовано нами для повышенного контроля численного эксперимента. Замечательным свойством этого уравнения является наличие у него локализованных, солитоноподобных решений для циркулярно-поляризованного поля, устойчивых относительно малых возмущений и которые для случая высокочастотного заполнения (переход к длинным импульсам со многими осцилляциями поля) плавно трансформируются в хорошо известные шредингеровские солитоны. Данное обстоятельство, в частности, позволяет надеяться, что и волновые солитоны с малым числом осцилляций унаследуют определенные свойства шредингеровских солитонов. К числу таких важных свойств относится свойство упругого взаимодействия двух соударяющихся солитонов, а именно, сохранение их солитонных структур до и после соударения. Под сохранением солитонной структуры волнового поля мы будем понимать сохранение лишь солитоноподобной структуры огибающей, полагая, что его спектральное содержимое может претерпевать изменения из-за нелинейного характера взаимодействия. Волновые солитоны уравнения (1) можно представить двухпараметрическим семейством решений вида [5]

$$\mathbf{E}(z, \tau) = a(\tau - \gamma z) [\mathbf{e}_x \cos \varphi(z, \tau) + \mathbf{e}_y \sin \varphi(z, \tau)], \quad (3)$$

$$\varphi(z, \tau) = \omega(\tau + \gamma z) + \int \frac{\omega a^2 (3\gamma - 2a^2)}{2(\gamma - a^2)^2} d(\tau - \gamma z) + \varphi_0, \quad (4)$$

где ω – характерная несущая частота, γ – параметр, определяющий групповую скорость солитона, φ_0 – постоянная фаза поля, а его огибающая $a(\tau - \gamma z)$ подчиняется уравнению в обыкновенных производных, которое для нормированных величин $\xi = \omega(\tau - \gamma z)$ и $u = a/(\gamma)^{1/2}$ в классе локализованных функций может быть представлена в виде квадратуры

$$\int_{u_m}^u \frac{1 - 3u^2}{u \sqrt{\delta^2 - F(u^2)}} du = \pm (\xi - \xi_0), \quad (5)$$

где $F(u^2) = u^2[(3/2)(1 + \delta^2) - (4 - 5u^2)/4(1 - u^2)^2]$, u_m – максимальная амплитуда солитона, определяемая действительным корнем кубического уравнения $F(u_m^2) = \delta^2$ (за исключением одного предельного решения, для которого $u_m^2 = 2/3$ при $\delta^2 = 1/8$), ξ_0 – постоянная интегрирования, отвечающая положению максимума огибающей поля. Как видно из (5), его решения зависят лишь от параметра $\delta^2 = 1/\gamma\omega^2 - 1$, являющегося комбинацией ω , γ и располагающегося в интервале $0 \leq \delta^2 \leq 1/8$. Используя малость параметра δ^2 , можно представить амплитуду волнового солитона в виде $u_m \simeq \delta \sqrt{2(1 + 8\delta^2/3)}$. При малых амплитудах $u_m^2 \ll 1/3$, соответствующих предельно малым δ , как легко видно, решения (5) имеют вид *sech* и отвечают шредингеровским солитонам огибающих. Отметим, что для предельно коротких длительностей, несмотря на широкий спектр сигнала, соизмеримый со средней частотой, ω удобно рассматривать в качестве характерной несущей частоты, являющейся таковой в пределе малых амплитуд. Важной особенностью рассматриваемых волновых солитонов является полуограниченный спектр их допустимых решений, то есть наличие граничного решения, соответствующего предельному солитону с минимально возможной длительностью импульса и, соответственно, с максимально возможной амплитудой. С увеличением δ амплитуда солитона возрастает, а его длительность, определенная по полувысоте интенсивности, уменьшается, достигая минимально возможной величины при $\delta^2 = 1/8$ и равной по сути менее периода колебаний, $\tau_s = 2.3\omega^{-1}$. Следует также обратить внимание, что волновые солитоны с малым числом колебаний обладают достаточно сильной частотной модуляцией, не позволяющей ввести определенным образом фазовую скорость для таких структурных образований, что делает их заметно отличными от известных ранее волновых

солитонов [10, 11], для которых и несущая частота и несущий волновой вектор строго определяются. По-видимому, именно соответствующим образом подобранный частотный чирп делает рассматриваемые волновые структуры более устойчивыми образованиями, которые достаточно легко могут быть сформированы заданием соответствующих начальных, локализованных распределений поля, даже применительно к случаю линейно-поляризованного поля, а также в рамках более общих уравнений, учитывающих, например, высокочастотную дисперсию [3, 4, 9], где они могут представлять собой лишь приближенные, слабозатухающие солитоноподобные решения.

В силу “однонаправленности” уравнения (1) для исследования парной столкновительной динамики будем располагать солитоны (3) в порядке убывания их групповых скоростей, а также располагать их таким образом, чтобы они пространственно не перекрывались. Естественно, начальные условия задавались в виде волновых структур (3)–(5), являющихся точными решениями исходного уравнения (1). Будем различать два принципиально различных случая взаимодействующих солитонов. Первый, когда взаимодействуют солитоны с близкими частотами, именно в этом случае возможно сопоставление полученных результатов с аналогичными для шредингеровских солитонов. И второй, не имеющий соответствующего аналога, когда характерные частоты заметно различаются.

В первой серии численных экспериментов ω полагались одинаковыми для сталкивающихся солитонов, а в качестве варьируемых параметров выступали амплитуды солитонов, а также абсолютная разность фаз их частотного заполнения, задаваемая в виде $\Delta\varphi = \varphi_{o1} - \varphi_{o2}$ при фиксированном расстоянии между солитонами, где φ_{o1} и φ_{o2} – постоянные фазы поля первого и второго солитонов, соответственно (см. (4)). Проведенные численные расчеты позволяют четко идентифицировать три различных режима динамического взаимодействия волновых солитонов, которые могут быть суммированы следующим образом.

Если амплитуды соударяющихся солитонов различаются более чем на 40% (приводимые здесь и далее численные значения приближенные и в общем случае могут меняться в зависимости от интервала значений параметров солитонов, в частности, указанная величина соответствует $\omega \sim 1$, $a \sim 0.2$), всегда наблюдается лишь один режим взаимодействия: солитоны проходят друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения. Типичная картина режима про-

хождения одной волновой структуры через другую представлена на рис.1.

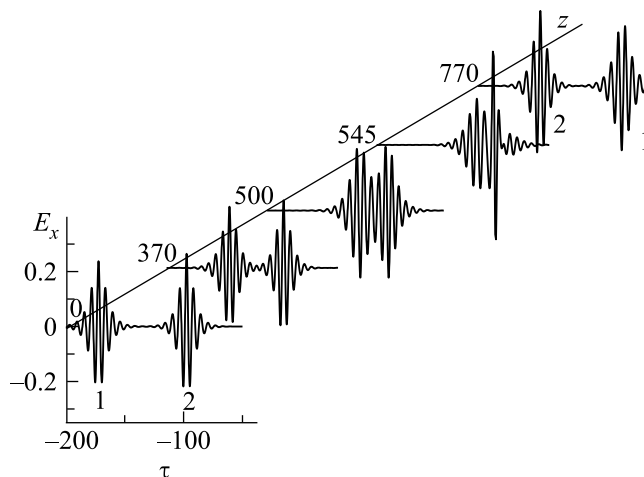


Рис.1. Режим прохождения солитонов с малым числом осцилляций друг через друга с полным сохранением своей волновой структуры, включая и частотные заполнения: $\omega = 1$ (характерный период осцилляций $\approx 2\pi$), $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 0$, где a_{si} , τ_{si} — амплитуда и длительность i -го (первого и второго) солитона, которые также отмечены соответствующими цифрами на рисунке

Если амплитуды соударяющихся солитонов различаются менее чем на 40%, то в зависимости от разности фаз наблюдаются три различных режима их взаимодействия, типичные сценарии которых представлены на рис.1–4. В диапазоне фаз $-\pi/8 < \Delta\varphi < \pi/8$, который в общем случае достаточно слабо зависит от амплитуд соударяющихся солитонов, солитоны (см. рис.1) проходят друг через друга без изменений, как и в случае заметной разницы в амплитудах, хотя режим их взаимодействия может быть достаточно длительным и сложным. При близких амплитудах их относительная скорость мала и потому они достаточно долго проходят друг через друга, по-видимому, даже с определенным обменом энергией на некоторых интервалах времени. При этом, как показывает спектральный анализ, их частотный состав практически не изменяется после взаимодействия, то есть, волновые структуры асимптотически остаются полностью идентичными самим себе, по крайней мере с точностью до некоторой задержки по отношению к невозмущенному движению, определяемой нелинейным взаимодействием. Данная задержка уменьшается с увеличением разницы в амплитудах.

Если фазы лежат в интервале $\pi/8 < \Delta\varphi < 5\pi/4$, то солитон с большей амплитудой догоняет более мед-

ленный, однако не проходит через него, а пространственно располагается сзади, как отражено на рис.2. В течение определенного периода взаимодействия этой

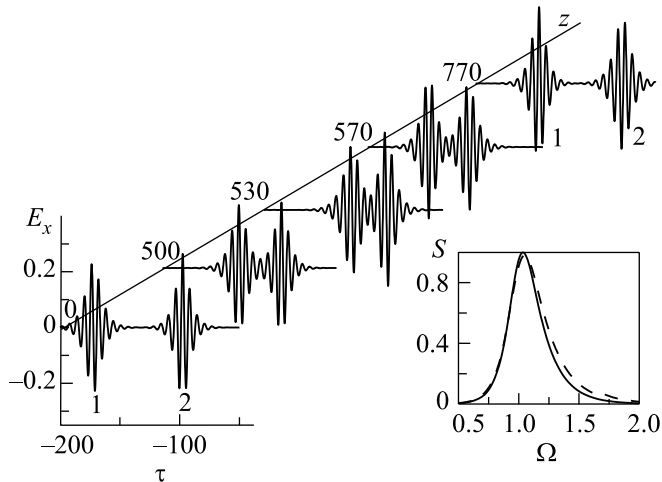


Рис.2. Режим репликации одной исходной волновой структуры другой: $\omega = 1$, $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 0.5\pi$. На вставке показаны спектральные мощности солитонов $S(\Omega)$ до и после взаимодействия, которые практически идентичны. Непрерывная линия соответствует первому (до) и второму (после) взаимодействию, пунктирная – второму (до) и первому (после) взаимодействию

связанной пары происходит обмен энергией с полной репликацией одного солитона другим, которые затем начинают распространяться независимо, фактически обменявшись и скоростями; усилившийся второй, первоначально более медленный солитон приобретает скорость первого и отходит от него. При этом происходит также полное копирование спектрального состава волнового поля; на вставке к рис.2 приведены спектральные мощности волновых солитонов $S(\Omega)$ до и после взаимодействия, которые с точностью численных расчетов полностью идентичны друг другу. Отметим также, что в представленных выше двух режимах фактически не произошло рождение новой волновой структуры, то есть волновые солитоны и после взаимодействия асимптотически остались теми же самыми, включая и их высокочастотные заполнения.

В диапазоне фаз $5\pi/4 < \Delta\varphi < 7\pi/4$, как видно из рис.3, наблюдался режим отталкивания, то есть после некоторого переходного периода, когда солитоны взаимодействуют сблизившись, но, оставаясь достаточно пространственно разделенными, солитоны разбегаются друг от друга. При этом, естественно, параметры волновых солитонов претерпевают измене-

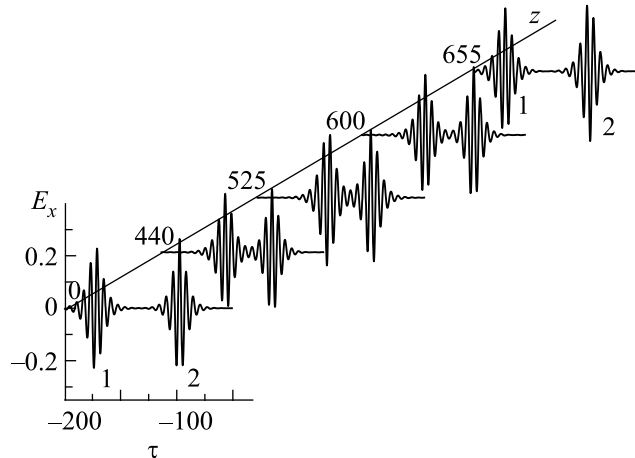


Рис.3. Режим отталкивания пары волновых солитонов друг от друга: $\omega = 1$, $a_{s1} = 0.24$, $\tau_{s1} = 9.2$ ($\delta_1 = 0.17$) и $a_{s2} = 0.26$, $\tau_{s2} = 8$ ($\delta_2 = 0.19$), $\Delta\varphi = 1.5\pi$

ния, и в первую очередь это относится к высокочастотному заполнению. Данный режим применительно к волновому полю лишь условно может быть назван упругим, так как волновые структуры до и после взаимодействия строго не одни и те же, хотя при небольшой разнице в амплитудах солитонов, когда и наблюдается данный режим взаимодействия, эти различия в общем-то малы. На рис.4 показаны типичные кар-

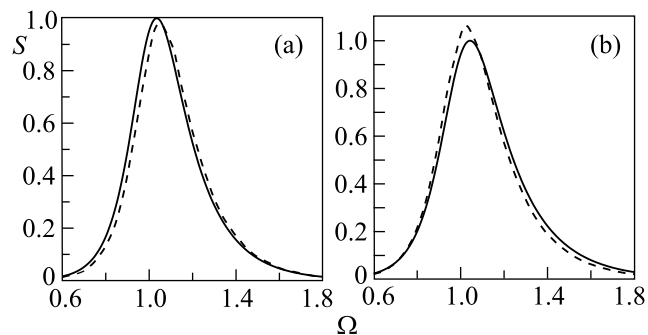


Рис.4. Спектральные мощности волновых солитонов $S(\Omega)$ до (непрерывные линии) и после (штриховые) отталкивания: (а) первого солитона, (б) второго, соответствующие параметры приведены на рис.3

тины изменений спектрального состава солитонов до (непрерывные линии) и после отталкивания (штриховые линии). Следует обратить внимание на то, что спектральный состав изменяется таким образом, что волновые структуры и после взаимодействия остаются солитонами в соответствии с решением (3), (4): спектр первого, отраженного, солитона смещается в синюю сторону, в то время как второго, получившего дополнительный “импульс” в направлении своего

движения, в противоположную, то есть красную сторону.

Во второй серии расчетов параметр ω полагался различным для сталкивающихся солитонов. В этом случае так же, как и в случае заметной разницы в амплитудах, наблюдался лишь один режим взаимодействия, когда солитоны проходят сквозь друга, асимптотически оставаясь теми же самими. Данный режим наблюдался вплоть до разности частот около 5% для значений $\omega \sim 1$. Типичный сценарий для параметров $\omega = 0.8$ и 1.4 , а также $a_{s1} = 0.29$, $\tau_{s2} = 11.5$ ($\delta_2 = 0.16$) и $a_{s2} = 0.22$, $\tau_{s2} = 6.67$ ($\delta_2 = 0.18$) представлен на рис.5, где солитоны проходят друг через

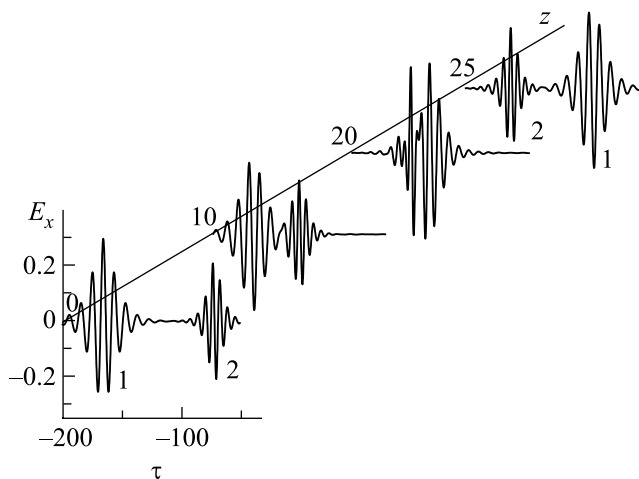


Рис.5. Режим взаимодействия волновых солитонов с разными несущими частотами: $\omega = 0.8$ и 1.4 , $a_{s1} = 0.29$, $\tau_{s1} = 11.5$ ($\delta_1 = 0.16$) и $a_{s2} = 0.22$, $\tau_{s2} = 6.67$ ($\delta_2 = 0.18$)

друга, практически не взаимодействуя и не меняя также своего спектрального состава. Видно также, что ввиду заметной разницы групповых скоростей эффективное взаимодействие, то есть по сути перекрытие волновых пакетов, происходит лишь на небольшой трассе распространения ($7 \lesssim z \lesssim 25$), в то время как в предыдущих случаях (см. рис.1–3) имело место весьма длительное взаимодействие волновых солитонов ($z \sim 700$). Следует отметить, что во всех режимах взаимодействия солитонов не наблюдалось генерации несолитонных компонент, то есть полная энергия, содержащаяся в волновых структурах, оставалась неизменной.

Таким образом, в результате проведенных численных экспериментов по парным соударениям волновых солитонов могут быть сформулированы следующие положения, которые отражают определенные динамические свойства векторного волнового уравнения (1) в классе циркулярно-поляризованных полей: 1) в результате соударений солитоноподобная структура волновых полей не нарушается, то есть волновые солитоны остаются солитонами и после соударений, 2) в результате соударений не происходит излучения свободных полей, то есть несолитонной части спектра, сохраняя тем самым общую энергию, заключенную в солитонах. Естественно, что эти положения не могут быть точными, так как основываются лишь на результатах численного моделирования. Тем не менее, мы полагаем, что они могут оказаться полезными как на пути теоретических исследований, так и практического использования волновых солитонов малых длительностей, подобно тому, какую роль играют шредингеровские солитоны огибающих.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 04-02-16420).

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, М.: Наука, 1980.
2. Е. М. Громов, В. И. Таланов, *Изв. вузов. Радиофизика* **41**, 222 (1998).
3. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997).
4. Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев, *Изв. вузов. Радиофизика* **46**, 415 (2003).
5. Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 722 (2003).
6. A. Baltuska, Z. Y. Wei, M. S. Pshenichnikov, and D. A. Wiersma, *Opt. Lett.* **22**, 102 (1997).
7. M. Nisoli, S. De Silvestri, O. Svelto et al., *Opt. Lett.* **22**, 522 (1997).
8. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
9. A. Nazarkin and G. Korn, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4748 (1999).
10. К. А. Горшков, В. А. Козлов, Л. А. Островский, *ЖЭТФ* **65**, 189 (1973).
11. В. А. Козлов, А. Г. Литвак, Е. В. Суворов, *ЖЭТФ* **76**, 148 (1979).