Спектры турбулентности, порождаемые сингулярностями

Е. А. Кузнецов[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2004 г.

Рассмотрена задача о спектрах турбулентности, порождаемых сингулярностями, сосредоточенными на линиях и плоскостях. Показано, что спектр по частотам отклонений поверхности жидкости за счет возникновения барашков – линейных сингулярностей имеет тот же скейлинг, что и слаботурбулентный спектр Захарова–Филоненко. При этом спектр по волновым векторам может иметь сильную анизотропию с убыванием в максимуме, как у спектра Филлипса. В изотропной ситуации, однако, поведение спектра сильно отличается от спектра Филлипса. Для двумерной турбулентности в случае сильной анизотропии скачки завихренности могут порождать в области максимального углового пика степенное распределение, совпадающее со спектром Крейчнана. При изотропном распределении спектр турбулентности совпадает со спектром Саффмана. Для акустической турбулентности, порождаемой ударными волнами, спектр для всех размерностей пространства имеет вид спектра Кадомцева-Петвиашвили: $E_\omega \sim \omega^{-2}$.

PACS: 47.15.Ki, 47.32.Cc

1. Хорошо известно, что особенности, возникающие в результате нелинейной эволюции в непрерывных средах, продуцируют в коротковолновой области степенные хвосты в спектре турбулентности. Эта идея была использована Филлипсом [1] для нахождения спектра турбулентности волн на воде за счет образования барашков, то есть особенностей поверхности $z = \eta(x, y, t)$ в виде заострений. В этом случае вторая производная вертикального отклонения поверхности η содержит δ-функционные особенности, благодаря чему фурье-образ от η при больших волновых числах падает как k^{-2}. Отсюда, по Филлипсу, спектр $E(k)$ оказывается пропорциональным k^{-3}, что при пересчете на частоты, $\omega = \sqrt{gk}$, дает [1]

$$E_\omega \sim \omega^{-5}, \qquad (1)$$

где E_ω нормирована так, что $\int E_\omega \, d\omega$ есть полная энергия (на единицу площади).

Те же самые рассуждения, примененные к двумерной гидродинамической турбулентности, где ожидаемые особенности могут быть связаны с резкими (в меру большого числа Рейнольдса) градиентами завихренности, должны были бы привести к распределению

$$E(k) \sim k^{-3}, \qquad (2)$$

то есть совпадать с точностью до логарифмического фактора со спектром Крейчнана [2], соответствующим постоянному потоку энстрофии.

Однако эти простые соображения требуют более внимательного рассмотрения, поскольку при выводе (1), (2) особенности *неявно* предполагались точечными, хотя они являются распределенными, сосредоточенными на линиях. Разница в характере сингулярностей, очевидно, должна сказываться и на спектрах турбулентности. В частности, если предположить, что скачки завихренности распределены изотропно, то спектр турбулентности будет сильно отличаться от распределения (2). Как было показано Саффманом, спектр в этом случае имеет вид [3]

$$E(k) \sim k^{-4}. \qquad (3)$$

Похожая ситуация имеет место для акустической турбулентности. Здесь, как указали Кадомцев и Петвиашвили [4], в качестве особенностей выступают ударные волны, на которых плотность газа испытывает скачки. В трехмерном случае эти особенности сосредоточены уже на поверхностях.

В данной работе мы изучим, как влияют распределенные особенности – линейные в двумерных системах и поверхностные в трехмерной геометрии – на спектры турбулентности и продемонстрируем на трех конкретных примерах, как находятся спектры турбулентности, обусловленные особенностями, для поверхностного волнения жидкости бесконечной глубины, двумерной гидродинамики при больших числах Рейнольдса и акустической турбулентности.

План статьи следующий. Раздел 2 посвящен спектрам поверхностного волнения. Вначале мы покажем, что частотный спектр (фурье-спектр) временной автокорреляционной функции вертикального отклонения поверхности жидкости $\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle$

[1)]e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

за счет заострений (нуль-мерная ситуация) в области высоких частот имеет степенную асимптотику $\sim \omega^{-4}$. Такое же поведение имеет спектр Захарова-Филоненко [5], который получается в приближении слабой турбулентности как точное решение кинетического уравнения для волн. Таким образом, спектр Захарова-Филоненко распространяется на область высоких частот, когда становятся существенны такие сильно-турбулентные процессы как опрокидывание. Это, в частности, объясняет экспериментально наблюдаемые частотные спектры [6] (см. также [7, 8]) морского волнения, измеренные в широком диапазоне углов наклона, начиная с малых, когда справедлива теория слабой турбулентности, вплоть до углов, когда становятся существенными эффекты опрокидывания поверхностных волн. Для всего этого диапазона в спектре наблюдается поведение ω^{-4}. Для двумерного спектра (как фурье-образа от одновременной пространственной корреляционной функции), обусловленного особенностями, ситуация оказывается принципиально другой. Во-первых, спектр, порождаемый одной сингулярностью, оказывается сильно анизотропным; он содержит два резких пика в перпендикулярном и параллельном к разрыву направлениях с убыванием по k в каждом из пиков, как у спектра Филлипса (1). Во-вторых, в изотропной ситуации спектр $E(k) \sim k^{-4}$, то есть сильно отличается от спектра Филлипса (1). Если считать, что между частотой и волновым числом имеется такое же соотношение, как и для линейных волн, то есть $\omega = \sqrt{gk}$, то этот спектр как функция частоты давал бы падение $\sim \omega^{-7}$.

В разделе 3 изучается поведение спектра двумерной турбулентности за счет скачков завихренности Ω – возможных кандидатов для особенностей в двумерном уравнении Эйлера. Многочисленные численные эксперименты (см. [9–17]) как для уравнения Эйлера, так и для уравнения Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса свидетельствуют в пользу формирования скачков завихренности, однако вопрос о коллапсе в двумерной гидродинамике остается до сих пор открытым. В этом разделе мы приводим аргументы в пользу коллапса, развивая предложенный для трехмерной идеальной гидродинамики подход [18], основанный на представлении вихревых линий – смешанном лагранжево-эйлеровом описании, когда каждая вихревая линия нумеруется двумерным лагранжевым маркером, а другой параметр задает саму вихревую линию. В двумерной гидродинамике вместо вихревых линий нужно рассмотреть линии ротора завихренности $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\Omega$. Этот вектор оказывается вмороженным в жидкость [19], что позволяет построить аналог представления вихревых линий. В основе этого описания лежит простое наблюдение: вектор $\mathbf{B}$ изменяется благодаря нормальной к $\mathbf{B}$ компоненте скорости $\mathbf{v}_n$, тангенциальная компонента скорости при этом играет пассивную роль, обеспечивая выполнения условия несжимаемости $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$. Но дивергенция $\mathbf{v}_n$ уже не равна нулю, поэтому линии $\mathbf{B}$ можно сжимать. Якобиан преобразования – перехода в криволинейную систему координат, двигающуюся вместе с $\mathbf{B}$, при этом не является фиксированным, он отличен от единицы. Именно сжимаемость преобразования может служить причиной формирования резких градиентов скорости. Хорошо известно, что появление особенности в газодинамике, то есть в сжимаемой гидродинамике, связано с явлением опрокидывания, которое есть основная причина формирования ударных волн. С точки зрения классической теории катастроф [20], этот процесс есть ни что иное, как формирование складок. Он полностью характеризуется отображением, описывающим переход от эйлерового описания к лагранжевому. Обращение якобиана J этого отображения в нуль означает появление особенности для производных скорости и плотности газа.

В данный момент остается неясным, происходит ли формирование особенностей в двумерной гидродинамике за конечное время – здесь необходимы как теоретические изыскания, так и проведение целенаправленных численных экспериментов. Необходимо обратить внимание на очень интересные результаты, полученные Юдовичем [21]. Им были построены примеры двумерных течений, для которых появление особенностей завихренности возможно, но за бесконечное время.

Если предположить, что скачки завихренности формируются и их пространственное распределение имеет случайный характер, то спектр в коротковолновой области находится аналогичным поверхностному волнению образом. Как и для поверхностных гравитационных волн, спектр от одной особенности демонстрирует сильную анизотропию с убыванием в максимальном углу как у спектра Крейчнана (2). В изотропном случае спектр турбулентности, как показано в этом разделе, воспроизводит ответ Саффмана [3].

Последний раздел посвящен звуковой турбулентности, понимаемой согласно [4], как случайный набор ударных волн. Показано, что спектр изотропной звуковой турбулентности в области коротких длин волн имеет одинаковую зависимость при любой размерности пространства:

$$E(k) \sim k^{-2}, \tag{4}$$

то есть совпадает с оригинальным результатом Кадомцева и Петвиашвили [4]. Интересно отметить, что зависимость фурье-образа временной (одноточечной) автокорреляционной функции плотности имеет такое же степенное убывание от частоты, как у пространственного спектра (4). Причина такого совпадения, по-видимому, связана с линейной зависимостью частоты звука от волнового числа: $\omega = kc_s$, где c_s – скорость звука.

2. Начнем наше рассмотрение с турбулентности поверхностного волнения жидкости бесконечной глубины. Линейные волны, как известно, в присутствии поля тяжести g имеют закон дисперсии $\omega_k = \sqrt{gk}$. Для волн малой амплитуды в приближении слабой турбулентности Захаровым и Филоненко в 1969 году был найден спектр турбулентности [5]

$$E_\omega \sim P^{1/3}\omega^{-4}. \tag{5}$$

Здесь P – постоянный поток энергии в область коротких длин волн, где происходит диссипация энергии. Спектр (5) получается как точное решение кинетических уравнений для волн. В приближении слабой турбулентности спектральная плотность энергии в $k-\omega$-представлении имеет δ-функционный вид:

$$E_{k\omega} = \varepsilon(k)\ \delta(\omega - \omega_k),$$

указывающий на то, что ансамбль волн слабонелинеен. Последнее позволяет из спектра $\varepsilon(k)$ находить распределение $E(\omega)$ с помощью простого соотношения

$$E_\omega = 2\pi k\ \frac{dk}{d\omega}\ \varepsilon(k), \tag{6}$$

где $k = \omega^2/g$.

Рассмотрим теперь сильнонелинейный режим, когда происходит формирование барашков на поверхности жидкости, то есть возникают особенности типа острия. Обратимся вначале к вычислению вклада в спектр одноточечной автокорреляционной функции $K(\tau)$ от такого типа особенностей. Для ее нахождения экспериментально измеряют возвышения η как функцию времени в некоторой точке $\mathbf{r}_0$, а затем по стандартной схеме находят $K(\tau)$:

$$K(\tau) = \langle \eta(t+\tau)\eta(t)\rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение. Спектр E_ω отсюда получается путем вычисления фурье-образа:

$$E_\omega = g\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau.$$

Чтобы найти вклад в спектр E_ω от особенностей в виде заострений поверхности, заметим, что в момент прохождения t_i заострения через точку изменения $\mathbf{r_0}$ вторая производная $\partial^2\eta/\partial t^2$ будет пропорциональна $\delta(t-t_i)$, то есть

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \sum_i \Gamma_i\delta(t-t_8) + \text{регулярные члены}. \tag{7}$$

Будем теперь предполагать величины Γ_i и времена t_i случайными и вычислим вклад в спектр от сингулярных слагаемых в (7). Фурье-образ от этих слагаемых будет равен

$$\eta_\omega = -\frac{1}{2\pi\omega^2}\sum_i \Gamma_i e^{-i\omega t_i}. \tag{8}$$

Здесь

$$\eta_\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)e^{i\omega t}dt,\quad \eta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\eta_\omega d\omega.$$

Чтобы найти отсюда спектр E_ω, необходимо возвести (8) по модулю в квадрат и произвести усреднение. Усреднение по временам t_i дает

$$E_\omega = \frac{g}{2\pi T}\langle|\eta_\omega|^2\rangle = \frac{g\nu}{2\pi\omega^4}\overline{\Gamma^2}, \tag{9}$$

где $\nu = N/T$ есть частота появлений заострений, N – число разрывов за время усреднения T, $\overline{\Gamma^2}$ – среднее значение Γ^2.

Важно отметить, что полученный ответ имеет ту же зависимость от частоты, что и слаботурбулентный спектр Захарова–Филоненко (5). Однако из спектра (9), строго говоря, нельзя восстановить распределение энергии по волновым масштабам с помощью соотношения (6), как это было в режиме слабой турбулентности. Для этого необходимо отдельное независимое вычисление.

Рассмотрим вначале один гребень волны с заострением, параллельный оси y, длины $l = x_1 - x_2$ с центром в точке (x_0, y_0). В этом случае

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \Gamma(x)\delta(y-y_0) + \text{регулярные члены}. \tag{10}$$

Здесь $\Gamma(x)$ считается непрерывной функцией x на интервале $[x_1, x_2]$ с равным нулю значениями на концах интервала ($\Gamma(x_{1,2}) = 0$), а также вне его.

Отсюда фурье-образ от сингулярной части (10) дается интегралом

$$\eta_k = -\frac{1}{k_y^2}e^{-ik_y y_0}\int_{x_1}^{x_2}\Gamma(x)e^{-ik_x x}dx,$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Это есть вклад от одной сингулярности. Общий вклад от всех разрывов дается суммой

$$\eta_k = -\sum_\alpha \frac{e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{n}_\alpha)y_\alpha}}{(\mathbf{k}\mathbf{n}_\alpha)^2} \int_{x_{1\alpha}}^{x_{2\alpha}} \Gamma_\alpha(x) e^{-i(\mathbf{k}\tau_\alpha)x} dx.$$

Здесь $\mathbf{n}_\alpha$ и τ_α – соответственно нормаль и единичный вектор к данному разрыву, $y_\alpha, x_{1\alpha}, x_{2\alpha}$ – координаты разрыва, задающие вместе с $\mathbf{n}_\alpha$ и τ_α положение и ориентацию разрыва α.

Чтобы найти спектр турбулентности, необходимо произвести усреднение $|\eta_k|^2$ по всем случайным переменным. Предполагая координаты (x_α, y_α) разрывов распределенными равномерно, проводим усреднение по этим переменным, что дает

$$|\eta_k|^2 = N\left\langle \left| \frac{1}{(\mathbf{k}\mathbf{n})^4} \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x) e^{-i(\mathbf{k}\tau)x} dx \right|^2 \right\rangle. \qquad (11)$$

Здесь N – среднее число разрывов, приходящееся на площадь S, угловые скобки означают усреднение по Γ, x_1, x_2, а также усреднение по углам.

Поскольку нас интересует коротковолновая асимптотика интеграла (11), $kL \gg 1$, где L – характерная длина разрыва, то стоящий в (11) интеграл при $|\mathbf{k}\tau|L \gg 1$ есть интеграл от быстро осциллирующей функции. В этом пределе он может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. Этот метод применим для всех углов θ_k (θ_k – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$), за исключением узкого конуса $kL\theta_k \le 1$. В этой области интеграл можно считать не зависящей от k величиной. В результате спектр $\tilde\epsilon(\mathbf{k})$ (до усреднения по углам!) в этой области углов имеет вид

$$\tilde\epsilon_1(\mathbf{k}) \approx \frac{gn}{4\pi^2 k^4} \langle (\bar\Gamma l)^2 \rangle, \;\; \theta_k \le (kL)^{-1}. \qquad (12)$$

где n – средняя плотность разрывов (на единицу площади),

$$\bar\Gamma l = \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x) dx, \;\; l = x_1 - x_2, \;\; L = \langle l \rangle.$$

Для углов θ_k, больших $(kL)^{-1}$, интеграл оценивается с помощью метода стационарной фазы. Однако главный порядок, пропорциональный $|\mathbf{k}\tau|^{-1}$, дает нулевой ответ, поскольку $\Gamma(x_{1,2}) = 0$. Ненулевой вклад в спектр $\tilde\epsilon(k)$ возникает в следующем порядке по $|(\mathbf{k}\tau)L|^{-1}$:

$$\tilde\epsilon_2(\mathbf{k}) = \frac{gn}{2\pi^2} \frac{\langle (\Gamma')^2 \rangle}{(\mathbf{k}\mathbf{n})^4 (\mathbf{k}\tau)^4}, \qquad (13)$$

где Γ' означает производную $\Gamma(x)$, взятую на концах интервала x_i. Как видно из полученного соотношения, спектр $\epsilon_2(k)$ содержит особенности для углов θ_k, близких к 0 и $\pi/2$. Для малых углов $\theta_k \approx (kL)^{-1}$ выражение (12) сшивается с (13). Для углов, близких к $\pi/2$, в (12) необходимо учитывать изгиб линии разрывов. Если a – характерное значение величины изгиба, то формула (13) будет справедлива в области углов $|\theta_k - \pi/2| > (ka)^{-1}$.

Распределения (12), (13) дают возможность вычислить спектр энергий – распределение энергии $E(\mathbf{k}) = k\overline{\tilde\epsilon(\mathbf{k})}$ по масштабам, где $\overline{\tilde\epsilon(\mathbf{k})}$ есть значение $\tilde\epsilon(\mathbf{k})$, усредненное с помощью функции распределения по углам.

Для изотропной турбулентности это усреднение сводится к интегрированию (12), (13) по углам θ_k. В результате интегрирования (12) имеем

$$E_1(k) = 2k \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tilde\epsilon_1(k) d\theta = \frac{gn}{\pi^2 k^4 L} \langle (\bar\Gamma l)^2 \rangle. \qquad (14)$$

При интегрировании по углам (13) основной вклад в спектр вносят углы, близкие к $0, \pi$ и $\pm\pi/2$, где спектр (13) имеет особенности. При $\theta \to 0(\pi)$ интеграл обрезается на углах $\theta_k = \pm\theta_0(\pi \pm \theta_0)$, а при $\theta \to \pm\pi/2$ – на углах $|\pi/2 \pm \theta_k| \approx ka^{-1}$. В результате усреднения имеем

$$E_2(k) = \frac{2gn}{3\pi^2 k^4} \langle (\Gamma')^2 \rangle (L^3 + a^3). \qquad (15)$$

Окончательный ответ для спектра в изотропном случае дается суммой (14) и (15):

$$E(k) = \frac{gn}{\pi^2 k^4 L} \left[\langle (\bar\Gamma l)^2 \rangle + \frac{2}{3} \langle (\Gamma')^2 \rangle (L^3 + a^3) \right], \qquad (16)$$

что отличается на одну степень k от спектра Филлипса. Если пересчитывать этот спектр в духе (1), то есть полагать в (16) $k = \omega^2/g$, то получилась бы степень не ω^{-5}, а ω^{-7}. В то же время, мы видели, что частотный спектр (9) имеет поведение $\sim \omega^{-4}$, но никак не ω^{-5} и тем более ω^{-7}, что вполне очевидно, поскольку в режиме сильнонелинейном, соответствующем появлению разрывов, между частотой ω и k нет связи $\omega = \sqrt{gk}$, как это имело место в режиме слабой турбулентности и, более того, нет связи между частотным спектром (9) и распределением по волновым числам (16). Если бы такая связь существовала, то

$$\frac{dk}{k^4} \sim \frac{d\omega}{\omega^4},$$

то есть между частотой ω и k существовала бы линейная связь вместо квадратичной для слабонелинейных волн.

Если распределение по углам является достаточно узким, например, когда все обрушивающиеся гребни волн ориентированы в одном направлении (такая однонаправленность может быть обусловлена, например, берегом и/или ветром), то в этом случае спектр будет иметь резкий пик в этом направлении. Если ширина функции распределения по углам $\Delta\theta$ будет уже θ_0 : $\Delta\theta < \theta_0$, то в этом случае зависимость спектра $E(k,\theta)$ в конусе углов $\theta < \Delta\theta$ будет иметь убывание $\sim k^{-3}$, то есть как и для спектра Филлипса. Отметим, однако, что данная асимптотика является лишь промежуточной, поскольку $\theta_0 = (kL)^{-1}$ уменьшается с ростом k. Поэтому, начиная с некоторого $k = k^*$, при усреднении по углам будут существенны особенности (13) при $\theta \to 0$, в результате чего спектр при $k > k^*$ будет падать как k^{-4}.

3. Аналогичным поверхностному волнению обстоит дело для двумерной турбулентности в пределе больших чисел Рейнольдса Re, если, следуя Саффману, предположить формирование особенностей для градиента завихренности, то есть когда величина завихренности $\Omega(\mathbf{r})$ испытывает скачки, толщина которых δ мала по сравнению с характерными масштабами турбулентности. Появление резких градиентов завихренности, как уже отмечалось во введении, наблюдалось в большом количестве численных экспериментов (см., например, [9–15]), моделирующих турбулентность при больших числах Рейнольдса – в режиме, когда в нулевом приближении можно вместо уравнения Навье-Стокса рассматривать уравнение Эйлера. Поэтому главным является вопрос: возможен ли такой процесс в рамках уравнения Эйлера? Если возможен, то происходит ли он за конечное время? В данном разделе мы приведем некоторые соображения в пользу этого.

Итак, рассмотрим уравнение Эйлера для завихренности $\Omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y$:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{div}\,\mathbf{v} = 0. \qquad (17)$$

Из этого уравнения следует, что Ω является лагранжевым инвариантом. Следуя работе Вейса [19], введем бездивергентный вектор $\mathbf{B}$ с компонентами:

$$B_x = \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \qquad B_y = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}.$$

Этот вектор направлен по касательной к линиям уровня $\Omega(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$. Уравнение движения для вектора $\mathbf{B}$ легко получается, если продифференцировать уравнение (17) по координатам:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\;[\mathbf{v}\times\mathbf{B}], \qquad (18)$$

то есть $\mathbf{B}$ является вмороженной величиной, подчиняется такому же уравнению, что и магнитное поле в идеальной магнитной гидродинамике. Из уравнения (18) видно, что $\mathbf{B}$ изменяется благодаря нормальной к $\mathbf{B}$ компоненте скорости $\mathbf{v}_n$. Тангенциальная компонента скорости $\mathbf{v}_\tau$ при этом играет пассивную роль, обеспечивая выполнения условия несжимаемости $\operatorname{div}\,\mathbf{v} = 0$. Именно это обстоятельство было ключевым при выводе представления вихревых линий для трехмерной идеальной жидкости (см. [24]). Действуя аналогично [24], введем новые траектории, определяемые нормальной компонентой скорости:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_n(\mathbf{r},t); \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{a}. \qquad (19)$$

Решение этой системы уравнений задает отображение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a},t). \qquad (20)$$

В силу того, что траектории (20) задаются не самой скоростью, а ее нормальной компонентой, якобиан J преобразования (20) не фиксирован, он может принимать произвольные значения. Этот факт непосредственно следует из уравнения

$$\frac{dJ}{dt} = \operatorname{div}\mathbf{v}_n\,J; \qquad J = \det\,\|\partial x_i/\partial a_j\|, \qquad (21)$$

которое получается из (19) путем дифференцирования по переменным $\mathbf{a}$ и последующего использования формулы Лиувилля. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{v}_n \neq 0$, то якобиан J может изменяться, в отличие от перехода от эйлерового описания к лагранжевому.

С помощью соотношений (19)–(21) уравнение (18) допускает интегрирование:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{(\mathbf{B}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_a)\mathbf{r}(\mathbf{a},t)}{J}, \qquad (22)$$

где $\mathbf{B_0}(\mathbf{a})$ есть начальное значение поля $\mathbf{B}$.

Еще раз повторим, что якобиан J, в силу сжимаемости отображения (20), может принимать произвольные значения, в том числе и нулевые. Как известно, появление в газодинамике разрывов – особенностей для плотности и поля скорости – обязано сжимаемости отображения – преобразования от эйлерового описания к лагранжевому. С точки зрения классической теории катастроф возникновение разрывов в газовой динамике в простейшей ситуации соответствует образованию складок отображения (см., например, [20]), чему отвечает обращение якобиана отображения в нуль. Поэтому естественно предположить, что такой процесс имеет место также в двумерной гидродинамике. По-крайней мере, многочисленные эксперименты, а также некоторые теоретические спекуляции (см., например, [22]) свидетельствуют в пользу этой точки зрения.

В дальнейшем мы будем предполагать, следуя Саффману [3], что в двумерной турбулентности при больших числах Рейнольдса происходит формирование скачков завихренности. Ширина δ скачков определяется из баланса инерционных и вязких сил. Как и во втором разделе, нас будет интересовать область коротких длин, когда k лежит в интервале

$$L^{-1} \ll k \ll \delta^{-1},$$

где L – характерный (энергосодержащий) масштаб турбулентности.

Для того чтобы найти спектр от разрывов, как и для поверхностного волнения запишем вначале выражение для градиента Ω от одного разрыва, предполагая его ориентированным вдоль y:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = G(x)\ \delta(y - y_0) + \text{регулярные члены},$$

где $G(x)$ считается непрерывной функцией, отличной от нуля на интервале $[x_1 x_2]$ при $G(x_{1,2}) = 0$, а затем просуммируем по всем разрывам.

Далее находим фурье-амплитуду Ω_k от ансамбля разрывов:

$$\Omega_k = -i \sum_\alpha \frac{e^{-i(\mathbf{kn})y_\alpha}}{(\mathbf{kn}_\alpha)} \int_{x_{1\alpha}}^{x_{2\alpha}} G_\alpha(x) e^{-i(\mathbf{k}\boldsymbol{\tau}_\alpha)x} dx. \quad (23)$$

Спектр энергий $\epsilon(k)$ находится отсюда с помощью соотношения

$$\epsilon(k) = \frac{\overline{|\Omega(k)|^2}}{8\pi^2 S k^2}, \quad (24)$$

где мы учли, что фурье-образ скорости $\mathbf{v}_k$ связан с Ω_k равенством $\Omega_k = i[\mathbf{k} \times \mathbf{v}_k]$. Отсюда, аналогично (12), (13), спектр $\epsilon(k)$ записывается в виде

$$\epsilon_1(k) = \frac{n}{8\pi^2 k^4} \langle(\bar{G}l)^2\rangle, \quad \theta_k \le \theta_0; \quad (25)$$

$$\epsilon_2(k) = \frac{n}{4\pi^2 k^2} \frac{\langle(G')^2\rangle}{(\mathbf{kn})^2 (\mathbf{k}\tau)^4}, \quad \theta_k > \theta_0. \quad (26)$$

Здесь n – плотность разрывов (на единицу площади), G' означает производную G, взятую на концах интервала x_α.

В изотропном случае спектр энергий $E(k)$ дается выражением

$$E(k) = \frac{n}{2\pi^2 k^4 L} \left[\langle(\bar{G}l)^2\rangle + \frac{2L^4}{3} \langle(G')^2\rangle\right],$$

что совпадает с ответом Саффмана [3].

В сильно анизотропном случае, когда разрывы ориентированы в одном направлении, спектр (25)–(26) имеет резкий пик в направлении анизотропии. Если угловой разброс функции распределения $\Delta\theta$ уже $\theta_0 = (kL)^{-1}$, то спектр энергий в этом пике имеет убывание $\sim k^{-3}$, то есть совпадает со степенной зависимостью спектра Крейчнана. При $k > k^*$ (k^* определяется точно так же, как и в предыдущем разделе) эта асимптотика сменяется на асимптотику спектра Саффмана k^{-4}.

4. Сказанное выше может быть прямо использовано для вычисления спектров звуковой турбулентности. Согласно Кадомцеву и Петвиашвили [4], звуковая турбулентность понимается как ансамбль ударных волн, расположенных случайным образом в пространстве. Ударные волны как скачки плотности представляют собой особенности. Таким образом, задача о спектре звуковой турбулентности в этой постановке подобна рассмотренным выше.

Если предыдущие примеры относились к двумерным системам, то для звуковой турбулентности можно проследить, как меняется ее спектр в зависимости от размерности пространства D, начиная с $D = 1$ и кончая тремя измерениями.

При $D = 1$ вывод лишь небольшими деталями отличается от (9), что дает [2)]

$$E_1(k) = \frac{n_1 c_s^2}{2\pi\rho_0 k^2} \overline{(\Delta\rho)^2}. \quad (27)$$

Здесь n_1 – плотность разрывов на единицу длины, c_s – скорость звука, ρ_0 – средняя плотность среды (на единицу длины), $\overline{(\Delta\rho)^2}$ – средний квадрат скачка плотности на разрыве.

При $D = 2$ для изотропной турбулентности, следуя вычислениям предыдущих разделов, спектр энергий $E(k)$ записывается в виде

$$E_2(k) = \frac{n_2 c_s^2}{\pi^2 \rho_0 k^2 L} \left[\langle(\overline{\Delta\rho} l)^2\rangle + \frac{2}{3} \langle(\Delta\rho')^2\rangle L^3\right], \quad (28)$$

где n_2 – плотность разрывов на единицу площади, $\overline{\Delta\rho}, l$ и $\Delta\rho'$ понимаются точно в том же смысле, что и для (12).

Таким образом, спектр $E(k)$ как в одномерном случае, так и в двумерном, ведет себя одинаково от k: падает пропорционально k^{-2}.

Оказывается, что и при $D = 3$ для спектра изотропной турбулентности имеет место такое же поведение. Вычисление спектра незначительно отличается от $D = 2$. Разница состоит в дополнительном интегрировании по углам в плоскости разрыва. Мы не будем приводить здесь все эти вычисления, а дадим

[2)] Спектр (27), по-видимому, впервые, был получен Бюргерсом [23], в многомерной постановке – Кадомцевым и Петвиашвили (см. ниже).

другой вывод того же результата, который получается в одну строчку, исходя из одномерного спектра (27). Рассмотрим корреляционную функцию плотности для изотропной турбулентности:

$$\phi(y_1) = \langle \rho(x_1 + y_1, x_2, x_3)\rho(x_1, x_2, x_3)\rangle.$$

Ее фурье-спектр (по одной переменной y_1 !) будет даваться выражением, совпадающим с точностью до множителя с (27):

$$\phi_k = \frac{N_1}{2\pi k^2}\,\overline{(\Delta\rho)^2}, \tag{29}$$

где N_1 понимается как средняя линейная плотность разрывов. При этом функция ϕ_k связана с трехмерным фурье-спектром

$$\Phi(|\mathbf{k}|) = \int \phi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{kr})} d\mathbf{r}$$

очевидным соотношением

$$\phi_{k_1} = \int \Phi(|\mathbf{k}|) d\mathbf{k}_\perp = \pi \int_{k_1^2}^{\infty} \Phi(s) ds^2.$$

Дифференцируя далее это равенство по k_1, получаем:

$$\Phi(k) = -\frac{1}{2\pi k}\frac{d\phi_k}{dk}.$$

Отсюда с учетом (29) спектр $E_3(k)$ дается выражением

$$E_3(k) = \frac{2N_1 c_s^2}{\pi\rho_0 k^2}\,\overline{\Delta\rho^2}.$$

Точно таким же образом, исходя из одномерного спектра (27), может быть найден двумерный спектр (28), правда, при этом, как было показано Саффманом [3], необходимо при обращении $\Phi(k)$ решить уравнение Абеля.

В заключение автор благодарит В. Е. Захарова и Е. Е. Расмуссена (J. J. Rasmussen) за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 00-01-00929), INTAS (грант # 00-00292) и Программы поддержки ведущих научных школ России.

---

1. O. M. Phillips, J. Fluid Mech. **4**, 426 (1958) [русс. пер.: О.М. Филлипс, в сб. *Ветровые волны*, М.: Из-во иностр. лит., 1962, с. 219].
2. R. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 1417 (1967).
3. P. G. Saffman, Stud. Appl. Maths. **50**, 49 (1971).
4. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР, **208**, 794 (1973).
5. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ДАН СССР **170**, 1292 (1967).
6. Y. Toba, J. Oceanogr. Soc. Japan **29**, 209 (1973).
7. M. Donelan, M. Hamilton, and W. H. Hui, Phil. Trans. Roy. Soc., London **A315**, 509 (1985).
8. O. M. Phillips, J. Fluid Mech. **156**, 505 (1985).
9. D. K. Lilly, J. Fluid Mech. **45**, 395 (1971).
10. J. C. McWilliams, J. Fluid Mech. **146**, 21 (1984).
11. S. Kida, J. Phys. Soc. Japan **54** 2840 (1985).
12. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, and P. L. Sulem, Phys. Rev. Lett. **57**, 683 (1986).
13. R. Benzi, S. Patarnello, and P. Santangelo, Europhys. Lett. **3**, 811 (1986).
14. B. Legras, B. Santangelo, and R. Benzi, Europhys. Lett. **5**, 37 (1988); B. Santangelo, R. Benzi, and B. Legras, Phys. Fluids **A1**, 1027 (1989).
15. K. Okhitani, Phys. Fluids **A3**, 1598 (1991).
16. B. Legras and D. Dritschel, *Applied Scientific Research*, **51**, p. 445-455, in *Advances in Turbulence IV*, Ed. F. T. M. Neiuwstadt, Kluwer, 1993.
17. A. H. Nielsen, X. He, J. J. Rasmussen, and T. Bohr, Phys. Fluids **8**, 2263 (1996).
18. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998); Phys. Rev. **E61**, 831 (2000).
19. J. Weiss, Physica **D48**, 273 (1991).
20. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, М.: Знание, 1981; *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1984.
21. V. I. Yudovich, Chaos **10**, 705 (2000).
22. D. G. Dritschel, Phys. Fluids **A5**, 984 (1993); J. Fluid Mech. **293**, 269 (1995).
23. J. M. Burgers, Lecture in Cal. Inst. Tech. (1951, unpublished).
24. Е.А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ, **76**, 406 (2002).