

Синхронизация и бифуркации внутренних и внешних степеней свободы атома в стоячей световой волне

В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц¹⁾

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичёва Дальневосточного отделения РАН, 690041 Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2004 г.

Теоретически и численно обнаружены и исследованы нелинейные динамические эффекты синхронизации и бифуркаций осцилляций Раби и осцилляций центра масс атома, движущегося в поле стоячей световой волны. Синхронизованные колебания, устойчивые к малому шуму, устанавливаются по окончании некоторого переходного процесса как при баллистическом движении атома, так и при его осцилляциях в яме оптического потенциала. Обнаружены бифуркации рождения предельных циклов разных периодов (наиболее ярко выражено утроение периода) и переход к хаотическому странному аттрактору через перемежаемость.

PACS: 05.45.–a, 42.50.Vk

1. Уравнения движения. Трудно переоценить успехи, достигнутые в манипулировании квантовыми системами с целью их использования для квантовых вычислений, обработки информации и проверки основных принципов квантовой физики. Активная работа в этом направлении ведется с атомами в высокодобротных резонаторах (см. обзор [1]). Рассмотрим двухуровневый атом, взаимодействующий с выделенной модой резонатора Фабри-Перо в виде стационарной стоячей световой волны. Стандартный гамильтониан резонаторной квантовой электродинамики [2]

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \hbar\Omega_0 \cos(k_f\hat{x})(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+) \quad (1)$$

описывает, соответственно, кинетическую и внутреннюю энергии атома, энергию моды и энергию атомно-полевого взаимодействия, зависящую от положения атома в резонаторе. В результате взаимодействия внутриатомной, трансляционной и полевой степеней свободы возникает сложная динамика атомно-полевой системы. Помимо хорошо известных и экспериментально наблюдаемых эффектов коллапса и возрождения осцилляций Раби, генерации сжатого света, охлаждения и пленения атомов и др. (см. [3, 4, 1, 5, 6]) в сильно связанной атомно-полевой системе (1) недавно теоретически и численно обнаружены динамический хаос [7], полеты Леви [8, 9] и атомные фракталы [9, 10]. Эти проявления локальной неустойчивости обнаружены и исследованы в гамильтоновой динамике, когда спонтанной релаксацией и

утечкой фотонов из резонатора можно пренебречь на характерных временах осцилляций Раби.

В настоящей работе исследуется диссипативная динамика атома в поле стоячей световой волны резонатора Фабри-Перо с лазерной подкачкой и сообщается об обнаружении новых нелинейных динамических эффектов: синхронизации внутренних и внешних степеней свободы атома, предельных циклов разных периодов, их бифуркаций, а также хаотических странных аттракторов. Действие внешнего лазерного поля описывается гамильтонианом $\hat{H}_1 = \hbar E_0 \hat{a} \exp i(\omega_f t + \phi) + \text{э.с.}$ В полуклассическом приближении (справедливом для сильного поля и атомов с импульсами, значительно превышающими импульс фотона $\hbar k_f$) нетрудно получить замкнутую систему уравнений для средних значений атомных и полевых операторов. Во вращающейся системе координат и с феноменологическим добавлением диссипативных членов она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha p, & \dot{p} &= (1/2)(gy - ex) \sin \xi, \\ \dot{e} &= y \cos \xi - 2\gamma_f e + 2E \sin(\Delta\tau + \phi), \\ \dot{g} &= x \cos \xi - 2\gamma_f g - 2E \cos(\Delta\tau + \phi), \\ \dot{x} &= \delta y + zg \cos \xi - (1/2)\gamma_a x, \\ \dot{y} &= -\delta x + ze \cos \xi - (1/2)\gamma_a y, \\ \dot{z} &= -(gx + ey) \cos \xi - \gamma_a(z + 1), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi \equiv k_f \langle \hat{x} \rangle$ и $p \equiv \langle \hat{p} \rangle / \hbar k_f$ – нормированные координата и импульс атома, $e \equiv \langle \hat{a}^\dagger + \hat{a} \rangle$ и $g \equiv i \langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle$ – полевые переменные, $x \equiv \langle \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_- \rangle$, $y \equiv i \langle \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+ \rangle$ и $z \equiv \langle \hat{\sigma}_z \rangle$ – блоховские атомные переменные. Время τ и скорости спонтанной релаксации атома γ_a и полевой моды γ_f нормированы на вакуумную частоту Раби Ω_0 , $\Delta \equiv (\omega_f - \omega_i) / \Omega_0$ – внешняя рас-

¹⁾e-mail: prants@poi.dvo.ru

стройка. Существенными управляющими параметрами системы являются расстройка атомно-полевого резонанса $\delta \equiv (\omega_f - \omega_a)/\Omega_0$, амплитуда подкачки $E \equiv E_0/\Omega_0$ и частота отдачи атома при излучении фотона $\alpha \equiv \hbar k_f^2/m_a \Omega_0$.

Анализ неавтономной нелинейной динамической системы (2) с четырьмя степенями свободы представляет значительные трудности. Ограничимся здесь случаем нулевой внешней расстройки $\Delta = 0$, $\phi = \pi/4$ и сильным полем. Если среднее число фотонов в моде $n = (e^2 + g^2)/4 \simeq (E/2\gamma_f)^2$ достаточно велико, то полевые переменные e и g практически постоянны. Тогда редуцированную систему (2) удобно переписать в виде, допускающем сравнение с гамильтоновой версией [2, 9]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \alpha p, & \dot{p} &= -u \sin \xi, \\ \dot{u} &= \delta v - (1/2)\gamma_a u, \\ \dot{v} &= -\delta u + 2nz \cos \xi - (1/2)\gamma_a v, \\ \dot{z} &= -2nv \cos \xi - \gamma_a(z + 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $u \equiv (ex - gy)/2 = \sqrt{n/2}(x + y)$ и $v \equiv (gx + ey)/2 = \sqrt{n/2}(y - x)$ имеют простой смысл переменных, пропорциональных квадратурным компонентам атомного дипольного момента.

2. Синхронизация. Под синхронизацией мы понимаем установившееся кратное соотношение частот осцилляций Раби и атомного импульса. Заметим, что частота осцилляций покоящегося атома, $\sqrt{\delta^2 + 4n}$, и частота малых колебаний центра масс атома в яме, $\alpha^{1/2}n^{1/4}$, могут отличаться в сильном поле на несколько порядков величин. Механический осциллятор навязывает свой ритм осциллятору Раби как в случае баллистического движения атома, так и при его осцилляциях в яме оптического потенциала $\Pi(\xi, \tau) = \int u \sin \xi d\xi$. Синхронизация проявляется в установлении предельного цикла в фазовом пространстве. Цикл периода k означает, что периодичность движения наблюдается при $2k$ пересечениях одного (осцилляции в яме) или разных (полет атома) узлов стоячей волны. На рис.1а, б для атома в яме изображены проекции предельных циклов периодов 1 и 3 на плоскости (u, v) и (z, ξ) при $\delta = 24$. Здесь и далее во всех численных расчетах мы принимаем $\alpha = 0.01$, $\gamma_a = 0.3$ и начальный импульс $p_0 = 60$. Размер цикла определяется амплитудой осцилляций, а его форма – спектром колебаний. Чем больше параметр нелинейности n , тем сильнее форма цикла отличается от гармонической. На левом фрагменте рис.1а показаны две фазовые траектории, соответствующие $n = 3000$ (штриховая линия) и $n = 10000$ (сплошная линия).

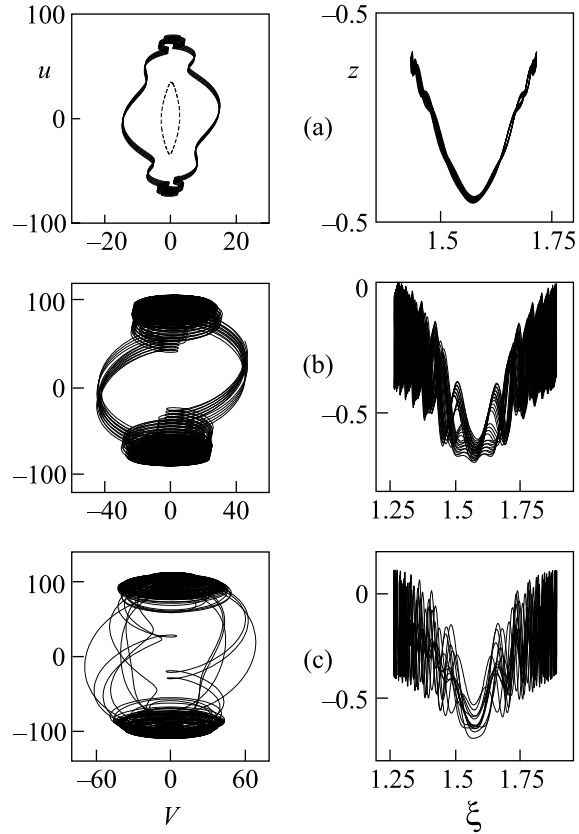


Рис.1. Аттракторы в динамической системе: (а) предельные циклы периода 1 (штриховая линия для $n = 3000$, сплошная для $n = 10000$), (б) предельный цикл периода 3 ($n = 14846$), (с) хаотический странный аттрактор ($n = 24000$). Везде $\delta = 24$

Очевидно, что второй предельный цикл сильно отличается от гармонического.

Время установления предельных циклов τ_c определяется, главным образом, действием силы трения $-\dot{p}$, которая тормозит (или ускоряет) атом в течение времени τ_c до достижения некоторого квазистационарного импульса \bar{p} (в литературе по механическому действию света на атомы это называется эффектом группирования атомов по скоростям, а соответствующий импульс – импульсом группирования [3]). Для атомов с импульсами, изначально близкими к \bar{p} , это время с точностью до константы можно оценить как $\tau_c \propto (\partial \bar{p} / \partial \alpha p)^{-1} \propto \delta/n$. В зависимости от параметров и начального импульса установившийся со временем средний импульс \bar{p} может быть как нулевым (атом захватывается и колеблется в яме оптического потенциала при $\delta > 0$), так и отличным от нуля (баллистическое движение сквозь резонатор с модуляцией скорости при $\delta < 0$). В режиме синхронизации в динамике атома устанавливается предельный

цикл, частота которого определяется частотой колебаний мгновенного импульса p вблизи установившегося среднего значения \bar{p} . При $\delta > 0$ и достаточно больших p_0 существует также режим, когда атом движется с ускорением, величина которого асимптотически приближается к нулю. В этом случае предельный цикл не устанавливается за разумное время.

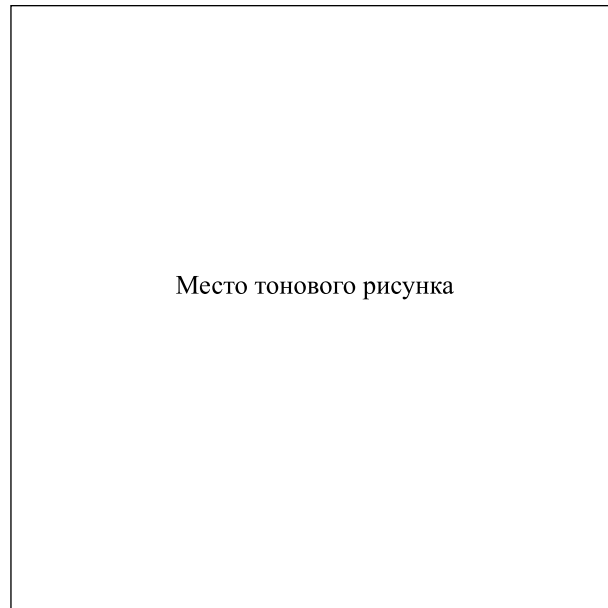
Чтобы получить простейшие приближенные аналитические решения для предельных циклов в случае баллистического движения, представим поляризацию атома, инверсию населенности и импульс в виде рядов Фурье по гармоникам $\alpha\bar{p}$, считая $\xi \simeq \alpha\bar{p}\tau$. Предельный цикл периода 1 описывается доминирующими членами ряда Фурье в приближении малости амплитуд высших гармоник. Приближенное решение

$$\begin{aligned} p &\approx \bar{p} - (\delta A/2\alpha\bar{p}) \cos 2\alpha\bar{p}\tau, \\ u &\approx -2\delta A \cos \alpha\bar{p}\tau, \\ v &\approx -\gamma_a A \cos \alpha\bar{p}\tau + 2\alpha\bar{p}A \sin \alpha\bar{p}\tau, \\ z &\approx -1 + A + A \cos 2\alpha\bar{p}\tau, \\ A &\equiv n/(\delta^2 - \alpha^2\bar{p}^2 + n + \gamma_a^2/4) \end{aligned} \quad (4)$$

справедливо для достаточно жесткого условия $n \ll \ll \delta^2 - \alpha^2\bar{p}^2 + \gamma_a^2/4$, что для выбранных нами в численных расчетах параметров означает $n \ll \delta^2$.

Численные эксперименты подтверждают, что при синхронизации с периодом 1 для баллистического движения доминирующей гармоникой осцилляций импульса и инверсии заселенности является вторая гармоника, а доминирующей гармоникой осцилляций поляризации атома – первая. При синхронизации колебаний атома в яме оптического потенциала получены сходные выражения. Однако в этом случае доминирующей гармоникой осцилляций импульса является первая гармоника, постоянная составляющая (очевидно) отсутствует и условия справедливости решений менее жесткие.

3. Бифуркации и хаос. При точном резонансе, $\delta = 0$, оптический потенциал исчезает, атом летит с постоянной начальной скоростью, а его внутренняя энергия осциллирует с модулированной частотой Раби, определяемой, в частности, пространственным периодом стоячей волны. Синхронизация имеет место в широком диапазоне управляющих параметров: среднего числа фотонов насыщения n и расстройки δ . С увеличением числа фотонов n происходят бифуркации с появлением циклов периодов 2, 3 и т.д. вплоть до численно обнаруженного цикла периода 12. При дальнейшем увеличении n возникают хаотические колебания, которые мы диагностируем по положительному значению максимального показателя Ляпунова λ . На рис.2 приведена карта периодов синхро-



Место тонового рисунка

Рис.2. Карта периодов синхронизации в зависимости от среднего числа фотонов насыщения n и безразмерной расстройки резонанса δ . Белый цвет – цикл периода 1, светло-серый – цикл периода 2, темно-серый – циклы периодов 3–12, черный – хаос

низации для сравнительно узкого диапазона значений n и δ . Хаос возникает при достаточно большом числе фотонов и, кроме того, чем больше n , тем короче время установления синхронизации. Белым цветом обозначен цикл периода 1, оттенками серого – циклы других периодов, а черным – область хаоса. На рис.3 приведена топографическая карта показателя Ляпунова λ , построенная для широкого диапазона n и δ , которая помогает различать области возможной синхронизации и области хаоса. По мере увеличения числа фотонов n приближенные решения для цикла периода 1 теряют справедливость, и в спектре колебаний становятся все более выраженными высшие гармоники. Из карты периодов синхронизации следует, что циклы периода 3 и выше появляются для практически случайных значений параметров, но внутри отчетливо видимых полос, между которыми существуют исключительно циклы периода 1. Кромка хаоса также сильно изрезана – вблизи нее имеются изолированные “острова”, малое отклонение от которых по любому управляющему параметру вновь приводит к предельному циклу.

Для фиксированных значений всех управляющих параметров различные начальные условия могут приводить к разным аттракторам. Мы обнаружили сосуществующие разные предельные циклы, бассейны притяжения которых имеют структуру решета

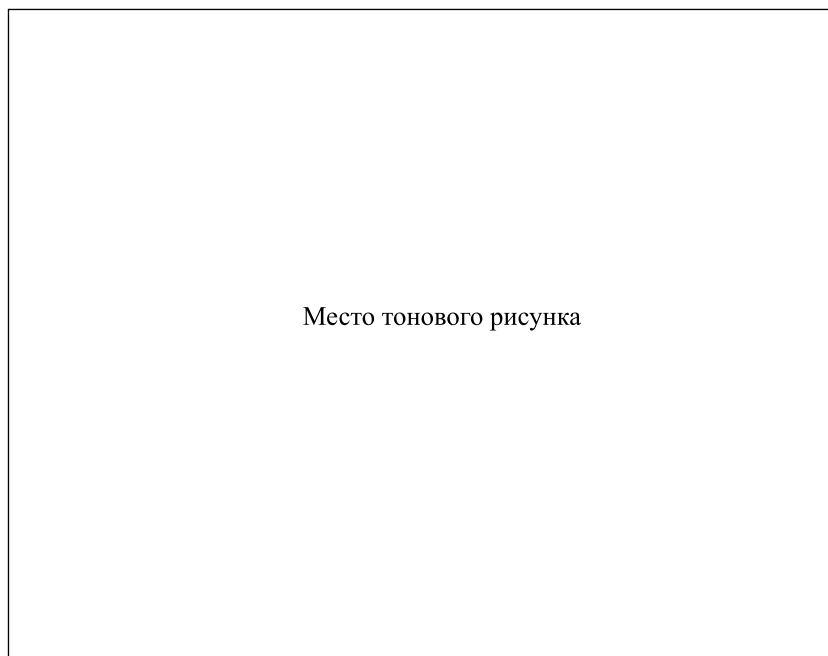


Рис.3. Карта максимального показателя Ляпунова λ в тех же координатах, что и на рис.2

(riddled basins [11]), то есть каждая точка бассейна одного аттрактора имеет в своей произвольно малой окрестности точку бассейна притяжения другого аттрактора. Это могут быть предельные циклы как разных периодов, так и одинаковых, но имеющих различную форму для близких начальных условий.

На рис.4а приведена бифуркационная диаграмма атома для фиксированных начальных условий и расстройки $\delta = 24$ в зависимости от числа фотонов n . По ординате отложены значения v -компоненты поляризации атома в моменты времени, когда другая ее компонента u обращается в нуль, причем фиксируются только отрицательные значения v . При $n \lesssim 12000$ наблюдается устойчивый цикл периода 1, при $12000 \lesssim n \lesssim 14000$ начинается “размножение” циклов периода 1. При дальнейшем увеличении n наряду с этим появляются циклы других периодов. На рис.4б видно, что при $n \lesssim 17050$ практически все точки диаграммы ложатся на четыре параллельных линии. При этом каждому значению n отвечает одно единственное значение v , однако при малом изменении n величина v случайным образом перескакивает с одной линии на другую. Как показало построение аналогичной диаграммы, где варьировались начальные условия, для данных значений параметров в фазовом пространстве системы сосуществуют четыре разных предельных цикла периода 1, каждый из которых имеет свой бассейн притяжения. “Вилка” b_1 на рис.4б означает не бифуркацию удвоения периода,

а появление двух новых циклов периода 1 из одного исходного. При дальнейшем увеличении n появляются бифуркации возникновения циклов с периодами, отличными от 1. На рис.4б они обозначены соответствующими цифрами. Среди бифуркаций в диапазоне $14000 \lesssim n \lesssim 21000$ наиболее типичными являются бифуркации утроения периода. Кроме того, имеются бифуркации удвоения периода (например, исчезновение цикла периода 3 при $n \simeq 17900$ и появление цикла периода 6) и другие бифуркации (например, появление или исчезновение цикла периода 3, не сопровождающееся одновременным исчезновением или появлением циклов других периодов). По крайней мере, три цикла периода 1 сосуществуют во всем данном диапазоне n .

Начиная с $n \simeq 21000$, наступает перемежаемость и, наконец, хаос в форме хаотического странного аттрактора. Проекция этого аттрактора на плоскости (u, v) и (z, ξ) изображены на рис.1с. Его хаотичность подтверждается положительным значением максимального показателя Ляпунова, а странность – вычислением фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича, равной $d_f \simeq 2.7$ для $n = 24000$ и $\delta = 24$. Для моделирования декогерентности, вызванной неконтролируемым окружением, мы включили стохастическую силу в правую часть второго уравнения в (3) и вычислили бифуркационную диаграмму для различных уровней шума. При малом шуме обнаружено малое “расплывание” линий предельных цик-

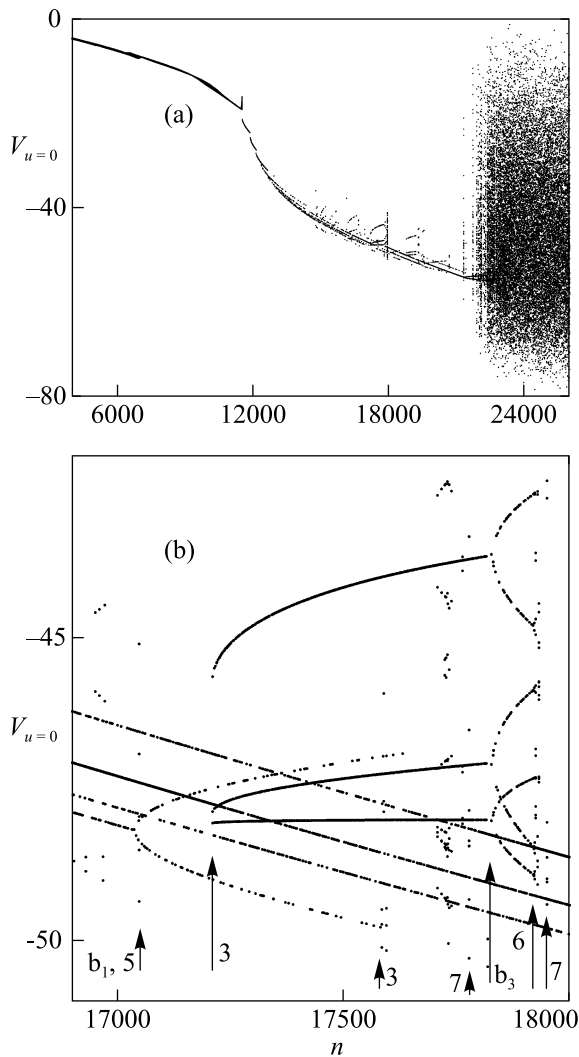


Рис.4. Бифуркационная диаграмма для разных диапазонов числа фотонов n ($\delta = 24$). Стрелками показаны: b_1 и b_3 – раздвоение циклов периода 1 и 3; 3, 5, 7 – циклы периодов 3, 5 и 7; 6 – бифуркация удвоения периода $3 \rightarrow 6$

лов периодов 1 и 3 с сохранением их характерных свойств. При увеличении уровня шума тонкая структура бифуркационной диаграммы на рис.4 разрушается.

Синхронизацию внутренних и внешних степеней свободы атома можно обнаружить по спектру флуоресценции атома. Например, синхронизованное баллистическое движение атома с циклом периода 1 произвольной формы приводит к появлению в спектре боковых полос на частотах $\omega_f \pm j k_f \bar{v}_a$ ($j = 1, 2, \dots$), где \bar{v}_a – средняя скорость установившегося движения атома. Синхронизации с циклом периода 3 порождает более плотный спектр с частотами $\omega_f \pm j k_f \bar{v}_a / 3$,

а хаос – сплошной спектр. В этом можно убедиться непосредственно, вычисляя среднее значение дипольного момента атома $d = (\mu/\sqrt{2n})[(u-v) \cos \omega_f t - (u+v) \sin \omega_f t]$, где μ – матричный элемент дипольного момента перехода, который для простоты выбран вещественным.

За пределами этой работы оставлены интересные вопросы синхронизации хаотических колебаний и эффекты случайного блуждания атома с фрактальными свойствами. В сущности, полученные здесь результаты справедливы для атома в поле стоячей волны не только в резонаторе, но и сформированной двумя встречными лазерными пучками в свободном пространстве (см. ур. (3)). Благодаря эффектам синхронизации и бифуркаций открываются дополнительные возможности управлять внутренними и внешними степенями свободы атома, изменяя параметры лазерного поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН (Программа “Математические методы в нелинейной динамике”), Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 02-02-17796) и Президиума Дальневосточного отделения РАН.

1. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
2. С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **75**, 71 (2002) [JETP Letters **75**, 63 (2002)].
3. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдатович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, М.: Наука, 1991 [A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *Mechanical Action of Light on Atoms*, World Scientific, Singapore, 1990].
4. В. Г. Миногин, В. С. Летохов, *Давление лазерного излучения на атомы*, М.: Наука, 1986 [V. G. Minogin and V. S. Letokhov, *Laser Light Pressure on Atoms*, Gordon and Breach, New York, 1987].
5. C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty et al., Science **287**, 1447 (2000).
6. P. Münstermann, T. Fischer, P. Maunz et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
7. S. V. Prants and V. Yu. Sirotkin, Phys. Rev. **A64**, 033412 (2001).
8. S. V. Prants, M. Edelman, and G. M. Zaslavsky, Phys. Rev. **E66**, 046222 (2002).
9. В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц, ЖЭТФ **123**, 1 (2003).
10. S. V. Prants and M. Yu. Uleysky, Phys. Lett. **A309**, 357 (2003).
11. J. C. Sommerer and E. Ott, Nature **365**, 138 (1993).