

# Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем

А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов<sup>1)</sup>

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

Поступила в редакцию 5 апреля 2004 г.

Обнаружен довольно универсальный механизм установления режима хаотической синхронизации связанных динамических систем. Показано, что возникновение синхронного режима базируется на возникновении фазовой связи между частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических осцилляторов.

PACS: 05.45.Tp, 05.45.Xt

Явление хаотической синхронизации является одним из фундаментальных феноменов, активно изучаемых в последнее время [1], имеющих важное не только теоретическое, но и прикладное значение (например, при передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [2], в биологических задачах [3] и т.д.). Различают несколько различных типов хаотической синхронизации, таких как обобщенная [4], фазовая [1], лаг [5] и полная синхронизация [6]. В [7] было показано, что фазовая, лаг и полная синхронизации тесно связаны между собой и, по сути дела, являются одним видом синхронных колебаний связанных хаотических осцилляторов. Характер синхронного режима (фазовая, лаг или полная синхронизация) определяется количеством синхронизованных временных масштабов, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [8]. Поскольку временной масштаб  $\nu$  связан с частотой, то синхронизация хаотических колебаний осцилляторов связана с возникновением фазовой связи между частотными компонентами  $\omega$  соответствующих фурье-спектров  $S(\omega)$ .

Целью настоящей работы является изучение механизма установления связи между частотными компонентами связанных динамических систем. Для начала рассмотрим, каким образом ведут себя близкие частотные компоненты двух связанных осцилляторов при увеличении связи между ними. В качестве модели осцилляторов, демонстрирующих поведение, близкое к одночастотному, выберем два взаимно связанных генератора Ван-дер-Поля со слегка различающимися параметрами:

$$\ddot{x}_{1,2} - (\varepsilon - x_{1,2}^2) \dot{x}_{1,2} + \Omega_{1,2}^2 x_{1,2} = \pm K(x_{2,1} - x_{1,2}), \quad (1)$$

где  $\Omega_{1,2} = \Omega \pm \Delta$  – слегка различающиеся парциальные частоты,  $x_{1,2}$  – переменные, описывающие поведение первого и второго автогенераторов, соответственно;  $K$  – параметр связи. Параметр нелинейности  $\varepsilon = 0.1$  был выбран малым для того, чтобы колебания автогенераторов были близки к одночастотным, асимметричный вид связи обеспечивает установление в системе (1) синхронного режима, аналогичного режиму лаг синхронизации в хаотических системах, когда колебания в генераторах происходят на одной частоте, при этом имеет место небольшая разность фаз колебаний, уменьшающаяся с ростом параметра связи.

Используя метод медленно меняющихся амплитуд, будем искать решение (1) в виде  $x_{1,2} = A_{1,2}e^{i\omega t} + A_{1,2}^*e^{-i\omega t}$ ,  $\dot{A}_{1,2}e^{i\omega t} + \dot{A}_{1,2}^*e^{-i\omega t} = 0$ , где “\*” означает комплексное сопряжение,  $\omega$  – частота, на которой происходят колебания в системе (1). Проводя усреднение по быстро изменяющимся переменным, получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\dot{A}_{1,2} = \frac{1}{2} (\varepsilon - |A|^2) A + i \frac{1}{2\omega} [(\Omega_{1,2}^2 - \omega^2) A_{1,2} \mp K(A_{2,1} - A_{1,2})]. \quad (2)$$

Выбирая комплексную амплитуду в виде

$$A_{1,2} = r_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}, \quad (3)$$

получаем уравнения для амплитуд  $r_{1,2}$  и фаз  $\varphi_{1,2}$  связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{1,2} &= \frac{1}{2} (\varepsilon - |r_{1,2}|^2) r_{1,2} \pm \frac{Kr_{2,1}}{2\omega} \sin(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}), \\ \dot{\varphi}_{1,2} &= \frac{\Omega_{1,2}^2 - \omega^2 \pm K}{2\omega} \mp \frac{Kr_{2,1}}{2\omega r_{1,2}} \cos(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}). \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1)</sup>e-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru

Условием синхронных колебаний генераторов (1) на частоте  $\omega$  является равенство нулю производных  $\dot{r}_{1,2}$  и  $\dot{\varphi}_{1,2}$ . Полагая, что разность фаз колебаний  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  достаточно мала, удерживая члены первого порядка малости по  $\Delta\varphi$  в соотношении (4), получаем следующие зависимости для разности фаз:

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{\varepsilon\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta(K + \Omega\Delta)}}}{2K + 4\Omega\Delta} \quad (5)$$

и частоты:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta(K + \Omega\Delta)}}, \quad (6)$$

которые соответствуют устойчивому и неустойчивому решению системы (4). Из соотношений (5) и (6) видно, что при малых значениях параметра расстройки  $\Delta$  разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний связанных осцилляторов на частоте  $\omega$  прямо пропорциональна частоте колебаний  $\omega$  и обратно пропорциональна параметру связи  $K$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon\omega}{2K}. \quad (7)$$

Из полученного выражения видно, что у взаимно связанных осцилляторов со слегка различающимися параметрами происходит захват близких частотных компонент фурье-спектров, при этом разность фаз между ними определяется соотношением (7). Важно подчеркнуть, что временное запаздывание между спектральными компонентами

$$\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \sim K^{-1} \quad (8)$$

не зависит от частоты, а следовательно, оказывается одинаковым для всех спектральных компонент. Именно благодаря этому факту становится возможным установление режима лаг синхронизации хаотических осцилляторов, когда динамика связанных систем на всех частотах отличается на один и тот же сдвиг по времени. Закономерность (8) имеет место для целого ряда динамических систем и, по всей видимости, носит универсальный характер. Рассмотрим проявления этой закономерности на нескольких характерных примерах синхронизации связанных хаотических систем.

В качестве первого примера рассмотрим хаотическую синхронизацию двух однонаправленно связанных автогенераторов [9, 10]. Ведущий генератор описывается системой безразмерных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\nu_1 [x_1^3 - \alpha x_1 - y_1], \\ \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 - z_1, \quad \dot{z}_1 = \beta y_1, \end{aligned} \quad (9)$$

а ведомый генератор, соответственно,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\nu_2 [x_2^3 - \alpha x_2 - y_2] + \nu_2 K(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 - z_2, \quad \dot{z}_2 = \beta y_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  и  $z_{1,2}$  — динамические переменные, характеризующие состояние ведущего и ведомого генераторов, соответственно. Значениями управляющих параметров выбраны  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 300$ ,  $\nu_1 = 100$ ,  $\nu_2 = 125$ , различие в параметрах  $\nu_1$  и  $\nu_2$  обеспечивает слабую неидентичность рассматриваемых генераторов.

На рис.1 приведена зависимость временного запаздывания  $\tau$  между временными реализациями связанных осцилляторов от величины параметра связи

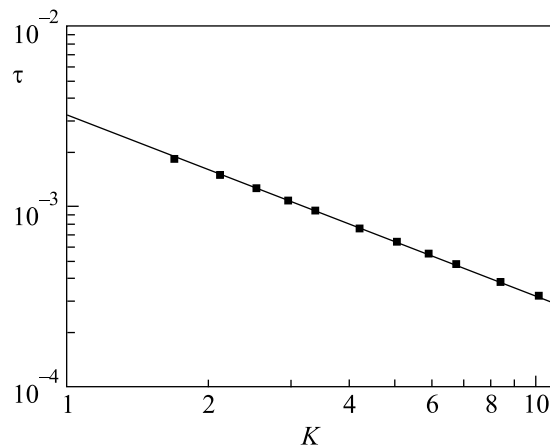


Рис.1. Зависимость временного сдвига  $\tau$  от величины параметра связи  $K$  для двух однонаправленно связанных хаотических генераторов (9), (10) со слегка различающимися параметрами (■). Прямая линия в двойном логарифмическом масштабе соответствует степенному закону  $\tau \sim K^{-1}$

зи  $K$ . В данном диапазоне значений параметра связи реализуется режим лаг синхронизации. Отчетливо видно, что временной сдвиг подчиняется степенному закону  $\tau \sim K^n$  с показателем  $n = -1$ , что соответствует теоретической зависимости (8).

В качестве второго примера рассмотрим две взаимно связанные системы Ресслера, находящиеся в режиме динамического хаоса:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + K(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + K(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varepsilon$  — параметр связи,  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 1.03$ . Значениями управляющих параметров были выбраны  $a =$

$= 0.22, p = 0.1, c = 8.5$ . При величине параметра связи  $0.04 \lesssim K \lesssim 0.14$  системы (11) находятся в режиме фазовой синхронизации, а при  $K > 0.14$  демонстрируют режим лаг синхронизации (см. [11]).

На рис.2 приведена зависимость временного сдвига  $\tau$  между основными частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических ос-

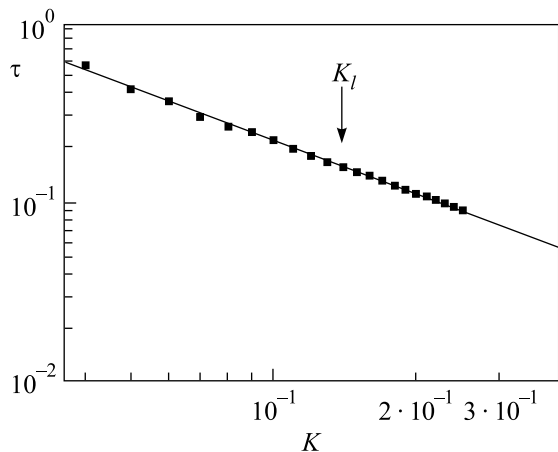


Рис.2. Зависимость временного сдвига  $\tau$  между основными частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических осцилляторов (11) от параметра связи  $K$  (■). Прямая линия соответствует степенному закону  $\tau \sim K^{-1}$ . Стрелкой на рисунке показано значение параметра связи  $K_l \approx 0.14$ , при котором наступает режим лаг-синхронизации

цилляторов от параметра связи  $K$ . Основная частота в спектре близка к  $\omega = 1$  и слегка изменяется с увеличением параметра связи. После того, как основные спектральные компоненты фурье-спектров взаимодействующих осцилляторов оказываются захваченными (что соответствует установлению режима фазовой синхронизации, см. также [7]), временной сдвиг между ними подчиняется универсальному степенному закону (8).

Таким образом, хаотическая синхронизация связанных осцилляторов выглядит следующим образом. При определенном значении параметра связи происходит захват основных спектральных компонент, что соответствует возникновению режима фазовой синхронизации. В том случае, если в фурье-спектре эта основная частотная компонента является доминирующей, режим фазовой синхронизации легко может быть диагностирован традиционными методами с помощью так называемой непрерывной фазы хаотического сигнала (см. [1, 12]), в противном случае необходимо использовать другие методы (см. [7]). По мере увеличения параметра связи все большее число спектральных компонент оказывается захваченным,

причем временной сдвиг для всех этих компонент подчиняется универсальной зависимости (8). Последнее иллюстрирует рис.3, показывающий возрастание числа синхронизованных спектральных компо-

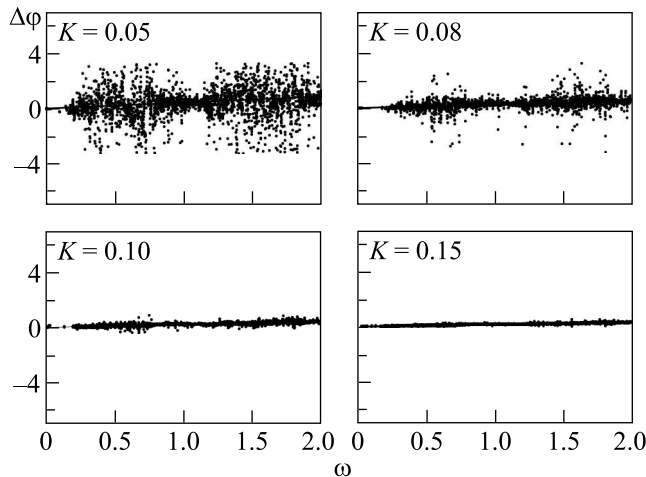


Рис.3. Разность фаз  $\Delta\varphi$  для различных частотных компонент фурье-спектров связанных систем Ресслера. Поскольку разность фаз синхронизованных спектральных компонент подчиняется соотношению (7), то для “захваченных” частот величина  $\Delta\varphi$  должна располагаться вдоль прямой линии. Отчетливо видно, что по мере роста параметра связи все большее число спектральных компонент оказываются захваченными

нент фурье-спектров связанных систем при увеличении параметра связи  $K$ . Факт синхронизации отдельных спектральных компонент выражается в том, что соответствующая разность фаз между этими компонентами подчиняется формуле (7), а соответствующая точка на плоскости  $(\Delta\varphi, \omega)$  ложится на прямую линию.

Захват всех частотных компонент соответствует установлению режима лаг синхронизации, а при последующем увеличении связи, в силу соотношения (8), временной лаг  $\tau$  стремится к нулю, а связанные колебания – к режиму полной синхронизации.

Итак, в настоящей работе выявлен довольно универсальный механизм установления режима хаотической синхронизации связанных динамических систем, основанный на возникновении фазовой связи между частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических осцилляторов. Полученные результаты могут служить критерием существования (или наоборот, невозможности существования) режима лаг синхронизации в связанных динамических системах.

Работа выполнена при поддержке Научно-образовательного центра “Нелинейная динамика и

биофизика” при Саратовском госуниверситете им. Н. Г. Чернышевского (грант # REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)), а также Программы поддержки ведущих научных школ РФ. А.Е.Х. благодарит также за финансовую поддержку Фонд “Династия” и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

1. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, 2001.
2. А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи*, М.: Физматлит, 2002.
3. R. C. Elson et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5692 (1998).
4. N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, *Phys. Rev.* **E51**, 980 (1995).
5. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
6. L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev.* **A44**, 2374 (1991).
7. А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Письма в ЖЭТФ* **79**, 391 (2004).
8. А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения*, М.: Физматлит, 2003.
9. G. P. King and S. T. Gaito, *Phys. Rev.* **A46**, 3092 (1992).
10. А. А. Короновский, А. Е. Храмов, И. А. Хромова, *Письма в ЖТФ* **30**, 69 (2004).
11. M. G. Rosenblum et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 264102 (2002).
12. Т. Е. Вадивасова, В. С. Анищенко, *Радиотехника и электроника* **49**, 76 (2004).