

Асимметрия временной динамики бризеров в электроконвективной твист-структуре нематика

О. А. Скалдин¹⁾, В. А. Делев, Е. С. Шиховцева

Институт физики молекул и кристаллов Уфимского научного центра РАН, 450075 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 2 ноября 2012 г.

После переработки 10 декабря 2012 г.

Экспериментально и теоретически изучена динамика бризерных дефектов в периодических структурах роллов, возникающих при электроконвекции в закрученных на $\pi/2$ нематических жидких кристаллах. В твист-структурах нематиков аксиальные компоненты скорости гидродинамического потока противоположны в соседних роллах. Динамика бризерного дефекта представляет собой периодические рождение и аннигиляцию пары классических дислокаций с топологическими индексами “+1” и “-1”. При этом аннигиляция происходит быстрее, чем рождение. Показывается, что асимметричная временная динамика бризерного дефекта хорошо описывается решением возмущенного уравнения *sin*-Гордона в виде взаимодействующих солитона и антисолитона.

DOI: 10.7868/S0370274X13020069

Наличие дальнего порядка в анизотропных жидкостях (жидких кристаллах) определяет возможность наблюдения в них различного рода объемных и поверхностных дефектов [1–3]. Теория статических дефектов, их взаимодействия и симметричных превращений достаточно хорошо разработана [4]. К ним относятся равновесные и квазиравновесные локализованные образования различного типа: ежи, буджу-мы, дисклинационные кольца, солитоны и т.д. [4–6]. Менее изучены динамика и свойства дефектов в решетках - периодических структурах диссипативного характера. Одной из таких систем, богатых на подобного рода эффекты, является электроконвекция, реализуемая в нематических жидких кристаллах (НЖК) с различными граничными условиями [7].

Образование и генерация дефектов при электроконвекции, с одной стороны, являются следствием нелинейного взаимодействия ориентационной и гидродинамической подсистем жидкого кристалла. С другой стороны, их временная динамика и структурные особенности в некоторых случаях являются определяющими в сценариях турбулизации пространственно-временного порядка выше порога его формирования [8–11]. Вследствие этого продолжает оставаться актуальным детальное изучение процессов образования дефектов в периодических структурах и их временной динамики. В случае однородных (так называемых гомогенных) гра-

ничных условий были классифицированы и подробно изучены статистические характеристики структурных дефектов при электроконвекции в за критической области образования доменов Капустина–Вильямса [12–15].

В более сложной ситуации, например в квазиодномерных твист-структурах нематика, обнаружены линейные локализованные образования со скачком фазы вдоль них на 180° [16, 17]. Теоретическое описание подобных объектов основано на использовании амплитудного уравнения Гинзбурга–Ландау [8, 18–21]. Однако возможен и другой подход, связанный с описанием пространственно распределенных дефектов. Он основан на глубокой аналогии их свойств и поведения с моделью Френкеля–Конторовой [22, 23]. В частности, в [24, 25] в пределе непрерывной фазы $\varphi(x)$, описывающей положения отдельных элементов цепочки, $\varphi(x)$ является решением одномерного, не зависящего от времени уравнения *sin*-Гордона.

Динамический случай “дышащего” дефекта был экспериментально и теоретически реализован в работе [26]. В ней где было показано, что такого рода дефекты, генерируемые в одномерной ролловой структуре закрученного нематика выше порога ее образования U_c , описываются решением в виде стоячего бризера. Однако в рамках предложенной модели в случае закрученной ролловой структуры в электроконвективной системе остались неучтенными следующие существенные моменты: тонкая структура диссоциированного по пространству дефекта с нулевым топологическим зарядом и асимметрия коле-

¹⁾e-mail: scala@anrb.ru

бательного процесса по временному циклу. Возможность их учета открывается при использовании более сложной модели возмущенного уравнения *sin*-Гордона. Эта модель была разработана для изучения пространственно-временных локализованных образований, в том числе и бризерных дефектов, в цепочке ДНК с бистабильной ячейкой и анизотропным внутримолекулярным трением [27].

В связи с вышесказанным целью данной работы явились попытка адекватного описания асимметричности развивающихся локальных пространственно-временных процессов в динамических бризерных дефектах и выяснение физических причин, связанных со свойствами электроконвективной твист-структуры нематика, определяющих это поведение.

В качестве модельной среды использовался НЖК 4-*n*-метоксифенилиден-*n*-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO₂. Подложки натирались в одном направлении для создания планарной однородной ориентации директора **n**. Затем они поворачивались друг относительно друга на угол $\pi/2$, так что возникала закрученная на $\pi/2$ конфигурация поля директора **n** [28]. Толщина ЖК-ячейки размером 16×12 мм² задавалась майларовыми прокладками $h = 20$ мкм. К ЖК-слою прикладывалось переменное напряжение U с частотой $f = 30$ Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса-Капустина $U_c = 5.6$ В. Измерения скоростей и направлений гидродинамических потоков в роллах проводились путем анализа движений пробных частиц диаметром 2–3 мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany). Их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720×576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

Как отмечалось выше, в закрученном на $\pi/2$ НЖК-слое при электроконвекции в одномерной ролловой структуре выше порога ее образования U_c образуются дефекты с несингулярным ядром (бризеры). Физические причины существования которых связаны с гидродинамикой противоположно направленного геликоидального течения в соседних роллах [26]. Экспериментальные исследования показали, что данный объект имеет сложную структуру. Она определяется начальной твист-закруткой поля директора нематика **n**(**r**). На рис. 1а и б представлен вид двух состояний диссоциированного дефекта, которые обязаны своим существованием процессу периодического замыкания геликоидальных течений при

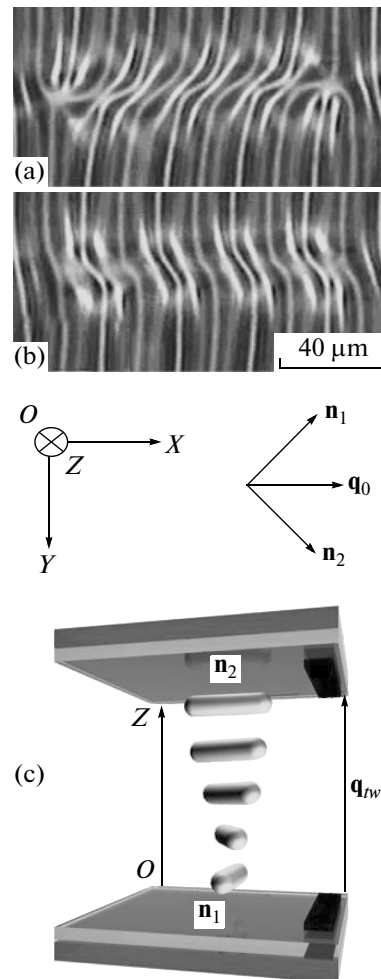


Рис. 1. Состояния бризерного дефекта с разницей по времени в “полпериода” при $U = 1.6U_c$ в крайне правом (а) и в крайне левом положении разворота роллов (б); Геометрия распределения поля директора твист-структуры (с). Здесь \mathbf{q}_0 – волновой вектор ролловой структуры, \mathbf{q}_{tw} – волновой вектор твист-структуры. Темными полосами на верхней и нижней подложках обозначены контакты для подвода электрического напряжения

локальной их коммутации вправо (рис. 1а) и влево (рис. 1б).

Детальный анализ этих состояний показывает, что имеет место пространственная анизотропия колебательного процесса, неэквивалентность правых и левых состояний в “точках разворота” по циклу. В одном из состояний происходит расщепление такого пространственно диссоциированного дефекта с несингулярным ядром и нулевым топологическим зарядом на дипольную пару дефектов с векторами Бюргерса ± 1 (рис. 1а), тогда как в другом – нет (рис. 1б). Кроме того, имеет место асим-

метрии временной динамики: время перехода (переключения) T_1 из состояния на рис. 1а в состояние на рис. 1б меньше времени перехода T_2 из состояния на рис. 1б в состояние на рис. 1а, т.е. разница “полупериодов” $\tau_0 = T_2 - T_1 \neq 0$ ($T = T_1 + T_2$ – время полного цикла). Для выяснения причин такого поведения рассмотрим распределение поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ вдоль оси OZ . На рис. 1с изображена конфигурация начального распределения поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, представляющая собой четверть пространственного геликоида, так что директор делает разворот на $\Delta = \pi/2$ от \mathbf{n}_1 планарной ориентации на одной из границ до \mathbf{n}_2 на другой. В данном конкретном случае мы имеем фрагмент правозакрученной спирали с волновым вектором \mathbf{q}_{tw} , направленным вдоль оси OZ . При периодических возмущениях (переключениях) вправо и влево происходит твист-деформация (Т-деформация) кручения, связанная с упругим модулем нематика K_{22} , которую формально можно описать уже распределенным волновым вектором $\mathbf{q}_{tw}(z, t) = \mathbf{q}_{tw} + \text{rot } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$. Тогда разница по энергии A между возбужденным и основным состояниями будет пропорциональна

$$A \sim 2K_{22} \left[\mathbf{q}_{tw} \text{rot } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \text{rot}^2 \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \right] \Big|_{t=T_{1,2}}. \quad (1)$$

Последнее следует из того, что вклад энергии Т-деформации в гамильтониан $V_{tw} \sim K_{22}[\mathbf{q}_{tw} + \text{rot } \mathbf{n}(\mathbf{r})]^2$ [7].

Таким образом, мы имеем бистабильную ячейку со снятым вырождением по энергии устойчивых состояний. Здесь надо отметить, что в одном из возбужденных состояний средняя деформация кручения Δ может превысить $\pi/2$ и составить $\pi/2 + \delta$. Это делает такое локальное состояние неустойчивым по отношению к релаксации поля директора в менее напряженное состояние, но со сменой знака кручения с правого на левое и $\Delta = \pi/2 - \delta$. Последнее может иметь место, когда эффективный поворот роллов совпадает с направлением кручения твист-слоя НЖК и на этот процесс требуется некоторое время τ_0 для реализации реориентационной твист-волны. Это связано с фундаментальным свойством нематика, когда навязанное кручение Т-деформации без хиральных добавок не может превышать 90° [29]. В действительности процесса смены правого направления на левое не происходит, так как характерных стенок, разделяющих области с правой и левой закрутками, не образуются. Однако наличие такого рода ориентационной неустойчивости стимулирует возрастание времени пребывания осциллирующего дефекта в

этом состоянии на τ_0 и, соответственно, определяет появление пары дефектов с векторами Бюргерса ± 1 .

Теперь перейдем к обоснованию теоретической модели и интерпретации наблюдаемых процессов. В закрученном на $\pi/2$ НЖК размер элементарной ячейки доменной структуры определяется как $d = 2\lambda$, где λ – поперечный размер ролла, что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости течения \mathbf{v}_a в соседних роллах. Это определяет периодичность аккумулированной потенциальной энергии, связанной с конвективным движением нематической жидкости в доменах [26]:

$$V_r = \sum_n V_0 [1 - \cos(2\pi u_n/h)], \quad (2)$$

где u_n является координатой n -го двойного ролла вдоль горизонтального направления X на рис. 1, $V_0 = \rho v_H^2 h \lambda$ [30], ρ – плотность НЖК, v_H – скорость геликоидального течения ($\sim 10^{-5}$ м/с [31]), l – длина двойного ролла, h – толщина НЖК-слоя. Тогда энергия, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна

$$V'_r = \frac{V_r}{l}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{l} = \rho v_H^2 h \lambda. \quad (3)$$

Для описания движения дефекта в решетке доменов необходимо учесть его механические свойства. Поскольку перемещение дефекта не является мгновенным, его инерционность можно охарактеризовать, приписав ему некоторую массу, приходящуюся на единицу длины ролла l . Внутренняя динамика дефекта, как, впрочем, и процессы переориентации молекул, энергетически подпитывается гидродинамической подсистемой НЖК. Поскольку же развивающаяся электроконвекция и формирование периодической структуры являются следствием диссипации энергии внешнего электрического поля за счет анизотропии проводящих свойств НЖК $\Delta\sigma_\alpha$, аккумулированная энергия V_0 геликоидальных потоков ЖК и является определяющей в наблюдаемых процессах. Кроме того, как было сказано выше, в электроконвективной твист-структуре нематика необходимо учесть расщепление по энергии устойчивых состояний. Применительно к нашему случаю для потенциальной энергии (2) с учетом возмущения этот вклад в интегральном виде может быть учтен аналогично [32]:

$$V_r = V_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi u_n}{h} \right) + A \left(1 - \cos \frac{\pi u_n}{h} \right). \quad (4)$$

Далее, энергия взаимодействия соседних вдоль направления X двойных роллов V_{inter} определяется от

носительными отклонениями их положений от равновесного расстояния u_0 :

$$V_{\text{inter}} = \frac{k}{2} \sum_n (u_{n+1} - u_n - u_0)^2, \quad (5)$$

где $k = Kq_0^2 l$ – константа взаимодействия [26], K – средний модуль упругости НЖК ($K \sim 5 \cdot 10^{-12}$ Н), q_0 – волновой вектор доменной структуры ($q_0 = 2\pi/\lambda \sim 10^5$ м $^{-1}$). Запишем относительную величину энергии взаимодействия как $V'_{\text{inter}} = V_{\text{inter}}/l$, т.е. $k' = k/l = Kq^2$. Тогда полная потенциальная энергия системы, приходящаяся на единицу длины сдвоенного ролла, будет равна $V' = V'_r + V'_{\text{inter}}$. Кинетическая энергия запишется в виде

$$K' = \frac{m'}{2} \sum_n \left(\frac{du_n}{dt} \right)^2, \quad (6)$$

где $m' = m/l$, $m = 2\rho h\lambda$ – масса двойного ролла, h – толщина ЖК-слоя.

Следует также учесть диссипацию в динамике дефекта, для чего соответствующие слагаемые вводятся феноменологически, как это было сделано в [32, 33]. В результате из гамильтониана $H' = V'_r + V'_{\text{int}} + K'$ в континуальном пределе с учетом потерь энергии по аналогии с [27] получаем уравнение движения для нормированного смещения η n -го двойного ролла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = & -\sin \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} + \Delta E \sin \frac{\eta}{2} - \\ & - \sigma_1 \left| \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right| - \sigma_2 \frac{\partial \eta}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\eta = \frac{\pi}{\lambda} u$, $\zeta = 1/(2\lambda\sqrt{\tilde{k}})x$, $\tau = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{V'_0}{4m'}} t$, $\tilde{k} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{4k'}{V'_0}$ [26], $\Delta E = -\frac{2A}{V'_0}$, τ и ζ – перенормированные время и координата вдоль ядра дефекта (вдоль оси OX на рис. 1). В данном случае $\Delta E < 0$. Это означает, что основными являются состояния $\varphi = 0, \pi$ с энергией $E_1 = 0$, а возбужденными – состояния $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ с энергией $E_2 = A$ ($A > 0$) (см. (1)).

Отдельно нужно сделать пояснения относительно диссипативных членов с σ_1 и σ_2 . Наиболее простым для интерпретации является член с σ_2 . Он описывает потери энергии движения дефекта за счет динамической вязкости НЖК, включающей обычное вязкое трение и анизотропную часть, характерную для ЖК [7].

Несколько сложнее дело обстоит с σ_1 . Потери энергии, зависящие от направления движения де-

фекта, описываются слагаемым $-\sigma_1 |\partial\eta/\partial t|$. В общем случае σ_1 может быть функцией η . Возможная зависимость $\sigma_1(\eta)$ может быть представлена в виде $\sigma_1(\eta) = \sigma_{10} \sin(\eta/2)$, $\sigma_{10} > 0$. Выбор знака и величины σ_{10} зависит от определенной физической системы. Большой интерес представляют системы с $\sigma_1 < 0$ и $\Delta E < 0$. Сочетание $\sigma_1 < 0$ и $\Delta E < 0$ дает дополнительное значение равновесной скорости солитона (антисолитона). В результате появляется принципиально новый эффект противоположных режимов переключения [33].

При обсуждении пространственно-временной асимметрии в динамике изучаемого дефекта говорилось о возможности протекания локальных релаксационных процессов со сменой направления закрутки твиста в одном из направлений движения с правой на левую и обратно, с переходом к исходной симметрии. Время такого перехода определяется толщиной слоя НЖК и его вязкоупругими характеристиками a [7]:

$$\tau_r \approx \gamma_1 h^2 / \pi^2 K_{22}, \quad (8)$$

где $\gamma_1 = 0.015 \Pi$, $K_{22} \simeq 4 \cdot 10^{-12}$ Н [29]. Численные оценки дают $\tau_r \sim (0.1-0.2)$ с. Это хорошо согласуется величиной разницы “полупериодов” τ_0 , представленной на рис. 2. Сам же коэффициент σ_1 является

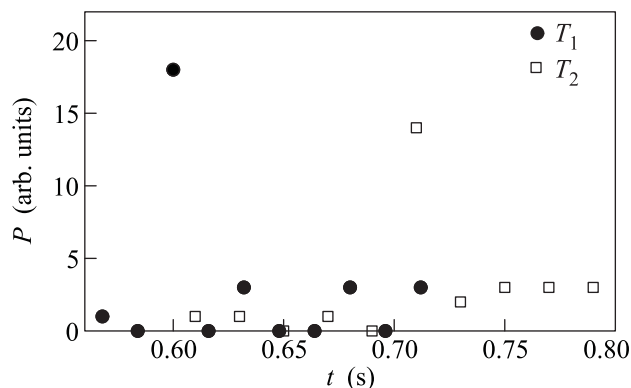


Рис. 2. Функции распределения по времени “полупериодов” T_1 и T_2 колебаний бризерного дефекта при аннигиляции двух дислокаций с зарядами $+1$ и -1 , т.е. при столкновении солитона и антисолитона (T_1 ; см. также рис. 1b) и при их разбегании (T_2 ; см. также рис. 1a), $U = 1.6U_c$

функцией $\sigma_1(\tau_r)$. Фактически это означает, что в реальном колебательном процессе имеется временная задержка, зависящая от направления смещения.

Таким образом, в данной модели мы учитываем одномерное анизотропное трение, которое определяет неэквивалентность взаимно противоположных движений или колебаний дефекта.

Далее, солитон-антисолитонные столкновения описываются медленно меняющимся во времени двухсолитонным решением невозмущенного уравнения *sin*-Гордона [34]:

$$\eta = -4 \operatorname{arctn} \frac{\operatorname{sh} R}{v \operatorname{ch} \Psi}, \quad (9)$$

где $R(\tau) = [\int_0^\tau v(\tau) d\tau + \zeta_0(\tau)](1 - v^2)^{-1/2}$ – расстояние между центрами солитона и антисолитона, $\Psi = \zeta(1 - v^2)^{-1/2}$. В данном представлении $R < 0$ до столкновения, $R > 0$ после столкновения, а столкновение происходит при $R = 0$. Здесь следует подчеркнуть, что бризер вблизи точки $R \simeq 0$ является частным случаем решения (9), когда величина v^2 становится отрицательной. Таким образом, прохождение солитонной пары через точку $R = 0$ в ее малой окрестности фактически эквивалентно поведению бризера за “полпериода”. В связи с этим проанализируем более подробно решение (9) в окрестности $R \sim 0$.

До столкновения решение (9) уравнения (7) представляет собой солитон $\eta_{\zeta \rightarrow -\infty} = 0$, $\eta_{\zeta \rightarrow +\infty} = 2\pi$, движущийся слева направо со скоростью v , и антисолитон $\eta_{\zeta \rightarrow -\infty} = 2\pi$, $\eta_{\zeta \rightarrow +\infty} = 0$, движущийся справа налево со скоростью $-v$. Если при столкновении не происходит аннигиляции, что соответствует нашему случаю, то после столкновения образуются солитон $\eta_{\zeta \rightarrow -\infty} = -2\pi$, $\eta_{\zeta \rightarrow +\infty} = 0$, движущийся слева направо со скоростью v , и антисолитон $\eta_{\zeta \rightarrow -\infty} = 0$, $\eta_{\zeta \rightarrow +\infty} = -2\pi$, движущийся справа налево со скоростью $-v$.

Согласно теории возмущений [34] для уравнения *sin*-Гордона функции $v(\tau)$ и $R(\tau)$ определяются из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{\operatorname{ch} R(1 - v^2)v^2 FL}{\operatorname{sh}^2(R) + v^2} - \frac{\pi\sigma_{10}}{4}v(1 - v^2) \times \\ &\quad \times \operatorname{sh}(R)\operatorname{ch}^2(R)N, \\ \frac{dR}{d\tau} &= \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta E}{2} \operatorname{sh}(R) \sqrt{1 - v^2} - \sigma_2 v \operatorname{ch}(R), \\ L &= \frac{1}{v^2} + \frac{1}{2 \operatorname{sh}(R) \sqrt{\operatorname{sh}^2(R) + v^2}} \times \\ &\quad \times \ln \left| \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2(R) + v^2} + \operatorname{sh}(R)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(R) + v^2} - \operatorname{sh}(R)} \right|, \end{aligned}$$

$$N = \frac{4v^2 + \operatorname{sh}^2(R)}{[\operatorname{sh}^2(R) + v^2]^{5/2}}.$$

Характер солитон-антисолитонного взаимодействия на малых расстояниях между солитоном и антисолитоном определяется из решения уравнения (7). Наглядное представление о нем, как было сказано выше, может быть получено из анализа поведения скоростей солитона и антисолитона вблизи области рассеяния $R = 0$ (рис. 3) для комбинаций параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$.

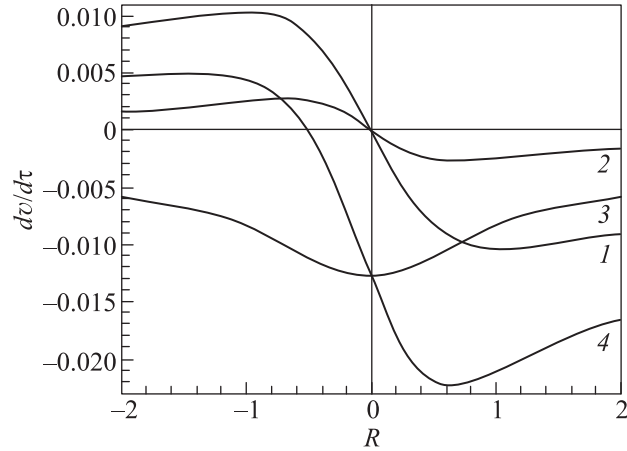


Рис. 3. Изменение скоростей солитона и антисолитона вблизи точки взаимодействия $R = 0$ в режиме рассеяния без аннигиляции: 1 – вклад вырождения по энергии основного состояния элементарной ячейки, 2 – вклад потерь энергии на анизотропное трение, 3 – вклад потерь энергии на обычное молекулярное трение, 4 – результирующая кривая. Здесь $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$

Качественная картина изменения скорости со временем может быть получена из решения первого уравнения системы (10) в предположении $v = v_m$, где v_m – средняя скорость, с которой возбуждение преодолевает точку $R = 0$. Чем больше скорость v_m , тем более плавными являются зависимости $dv(R)/d\tau$. Как видно из рис. 3, при приближении солитона и антисолитона друг к другу ($R < 0$) их скорости возрастают, что соответствует состоянию бризерного дефекта на рис. 1b. При их взаимном удалении после столкновения ($R > 0$) их скорости уменьшаются, т.е. имеет место притяжение. В реальной системе это соответствует образованию дипольной пары классических дефектов по пространственной границе бризера (см. рис. 1a), для чего системе необходимо дополнительное время τ_r (см. выражение (8)). Результирующая функция $dv(R)/d\tau$ не является симметричной относительно точки $R = 0$. Для величин ΔE и σ_{10} , существенно меньших по сравне-

нию с σ_2 , результирующая функция $dv(R)/d\tau$ может целиком лежать в отрицательной области. Тогда перед столкновением солитон и антисолитон отталкиваются, что соответствует гашению скорости, а после столкновения – притягиваются. Комбинация же параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 > \sigma_2$ и $\sigma_{10} < 0$ приводит к отталкиванию солитона и антисолитона после столкновения.

В заключение необходимо еще раз подчеркнуть, что наблюдаемая асимметрия поведения при сочетании параметров $\pi|\sigma_{10}|/4 < \sigma_2$, $\sigma_{10} > 0$, по всей видимости, является внутренним свойством электроконвективной твист-структуры нематика.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 12-02-97039).

1. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon, Oxford, 1994.
2. M. Kleman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley & Sons, Chichester, 1983.
3. *Defects in Liquid Crystals: Computer Simulations, Theory and Experiments* (ed. by O. D. Lavrentovich, P. Pasini, C. Zannoni, and S. Zumer), Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2001.
4. М. В. Курик, О. Д. Лаврентович, УФН **154**, 381 (1988).
5. П. В. Долганов, В. М. Жилин, В. К. Долганов, Е. И. Кац, Письма в ЖЭТФ **89**, 181 (2009).
6. О. А. Скалдин, Ю. И. Тимиров, Письма в ЖЭТФ **90**, 699 (2009).
7. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах*, М.: Наука, 1981.
8. *Pattern Formation in Liquid Crystals* (ed. by A. Buka and L. Kramer), Springer-Verlag, N.Y., 1996.
9. A. Weber, E. Bodenschatz, and L. Kramer, Adv. Mater. **3**, 191 (1991).
10. S. Nasuno, O. Sasaki, and S. Kai, Phys. Rev. A. **46**, 4954 (1992).
11. N. Oikawa, Yo. Hidaka, and Sh. Kai, Phys. Rev. E. **70**, 066204-1 (2004).
12. H. Yamazaki, S. Kai, and K. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 1 (1987).
13. S. Kai, N. Chizumi, and M. Kohno, J. Phys. Soc. Jpn. **58**, 3541 (1989).
14. S. Nasuno, S. Takeuchi, and Y. Sawada, Phys. Rev. A **40**, 3457 (1989).
15. S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, Phys. Rev. A **42**, 5998 (1990).
16. V. A. Delev, P. Toth, and A. P. Krekhov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **351**, 179 (2000).
17. S. Tatsumi, M. Sano, and A. G. Rossberg, Phys. Rev. E **73**, 011704-1 (2006).
18. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, Physica D **32**, 135 (1988).
19. L. Kramer, E. Bodenschatz, W. Pesch et al., Liq. Cryst. **5**, 699 (1989).
20. L. Kramer, E. Bodenschatz, and W. Pesch, Phys. Rev. Lett. **64**, 2588 (1990).
21. E. Bodenschatz, W. Pesch, and L. Kramer, J. Stat. Phys. **64**, 1007 (1991).
22. P. Bak, Rep. Prog. Phys. **45**, 587 (1982).
23. Т. А. Конторова, Я. И. Френкель, ЖЭТФ **8**(89), 1340 (1938).
24. F. C. Frank and J. H. van der Merwe, Proc. R. Soc. London A **198**, 205 (1949).
25. M. Lowe and J. P. Gollub, Phys. Rev. A **31**, 3893 (1985).
26. О. А. Скалдин, В. А. Делев, Е. С. Шиховцова и др., Письма в ЖЭТФ **93**, 431 (2011).
27. E. S. Shikhovtseva, Physica A **303**, 133 (2002).
28. А. Н. Чувывров, О. А. Скалдин, В. А. Делев и др., ЖЭТФ **130**, 1072 (2006).
29. Л. М. Блинов, *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов*, М.: Наука, 1978.
30. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **67**, 155 (1975).
31. A. Hertrich, A. P. Krekhov, and O. A. Scaldin, J. Phys. II France **4**, 239 (1994).
32. Е. С. Шиховцова, О. А. Пономарев, Письма в ЖЭТФ **64**, 467 (1996).
33. E. S. Shikhovtseva, Phys. Low-Dim. Struct. **11/12**, 77 (1999).
34. D. W. McLaughlin and A. C. Scott, Phys. Rev. A **18**, 1652 (1978).